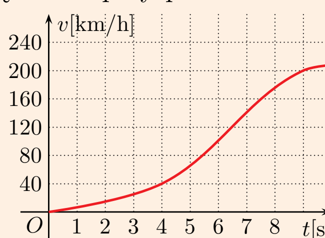


4 Rachunek różniczkowy

Rachunek różniczkowy (zwany też rachunkiem pochodnych) oraz związany z nim rachunek całkowy stały się podstawą rozwoju fizyki klasycznej. Dzięki nim możliwe było między innymi opisanie ruchu ciał za pomocą równań wiążących ze sobą takie wielkości jak czas, droga, prędkość i przyspieszenie.

Jeśli chcemy obliczyć średnie przyspieszenie samochodu od chwili t_0 do chwili t, korzystamy ze wzoru: $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ (dzielimy przyrost prędkości przez czas, w którym on nastąpił).

Jeśli chcemy obliczyć przyspieszenie w chwili t_0, korzystamy z tego, że jest ono **pochodną** funkcji prędkości od czasu (patrz str. 267).

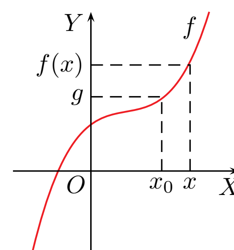


Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się prędkość v samochodu w czasie t.

Uczeń:
- uzasadnia, że funkcja nie ma granicy w punkcie, również na podstawie jej wykresu,
- uzasadnia, że dana liczba jest granicą funkcji w punkcie, korzystając z definicji.

*4.1. Granica funkcji w punkcie

Intuicyjne pojęcie granicy



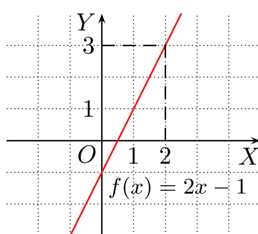
Granica funkcji jest jednym z podstawowych pojęć matematyki. Przez stwierdzenie, że „liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0” rozumiemy, że wartość funkcji f „zbliża się” do g, gdy x „zbliża się” do x_0. Piszemy wówczas:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \quad \text{lub} \quad f(x) \to g \text{ przy } x \to x_0$$

Przykład 1

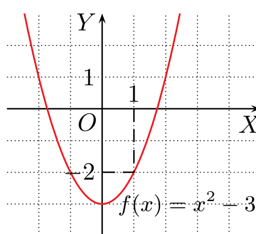
Odczytaj z rysunku, ile jest równa granica funkcji w danym punkcie.

a) $\lim_{x \to 2}(2x-1)$



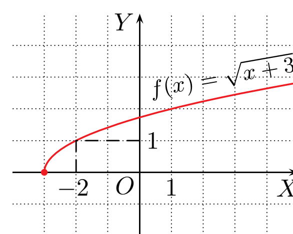
Gdy x „zbliża się” do 2, $f(x)$ „zbliża się” do 3:
$\lim_{x \to 2}(2x-1) = 3$

b) $\lim_{x \to 1}(x^2-3)$



Gdy x „zbliża się” do 1, $f(x)$ „zbliża się” do -2:
$\lim_{x \to 1}(x^2-3) = -2$

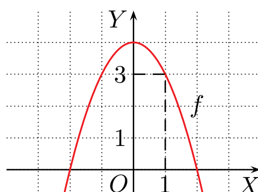
c) $\lim_{x \to -2}\sqrt{x+3}$



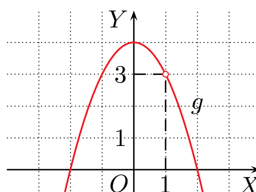
Gdy x „zbliża się” do -2, $f(x)$ „zbliża się” do 1:
$\lim_{x \to -2}\sqrt{x+3} = 1$

Przykład 2

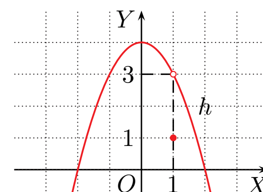
Poniżej przedstawiono wykresy funkcji f, g i h. W punkcie $x_0 = 1$ funkcje te mają tę samą granicę: $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} h(x) = 3$.



$f(x) = 4 - x^2$, $D_f = \mathbf{R}$



$g(x) = 4 - x^2$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{1\}$



$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

Punkt x_0, w którym badamy granicę, nie musi należeć do dziedziny funkcji (funkcja g). Jeśli x_0 należy do dziedziny, to wartość funkcji w punkcie x_0 nie ma wpływu na wartość tej granicy (funkcje f i h).

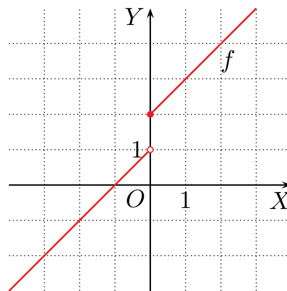
dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.1

Generator testów i sprawdzianów

Przykład 3

Funkcja $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x<0 \\ x+2 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$ (rysunek obok). Gdy x „zbliża się” do 0 z prawej strony, wartość funkcji „zbliża się” do 2, natomiast gdy x „zbliża się” do 0 z lewej strony, wartość funkcji „zbliża się” do 1.



Definicja

Liczba g jest **granicą** funkcji f w punkcie x_0 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Uwaga. Kiedy mówimy o granicy funkcji f w punkcie x_0, zakładamy, że funkcja f jest określona w pewnym **sąsiedztwie** punktu x_0, czyli zbiorze $(x_0 - r; x_0) \cup (x_0; x_0 + r)$, gdzie $r > 0$. Funkcja nie musi być określona w punkcie x_0.

D **Przykład 4**

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 5$. Uzasadnij, że $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 9$.

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od 2 i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n^2+5) = \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot x_n + 5) = 2\cdot 2 + 5 = 9$$

Zatem zgodnie z definicją $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 9$.

D **Ćwiczenie 1**

Uzasadnij, że:

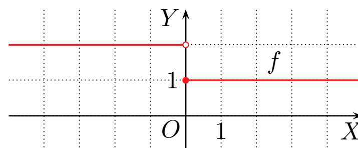
a) funkcja $f(x) = 6 - 2x^2$ ma w punkcie $x_0 = -1$ granicę równą 4,

b) funkcja $f(x) = \frac{3}{x+7}$ ma w punkcie $x_0 = 5$ granicę równą $\frac{1}{4}$.

D **Przykład 5**

Wykaż, że funkcja $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x<0 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.



Rozpatrzmy ciągi $a_n = -\frac{1}{n}$ oraz $b_n = \frac{1}{n}$ zbieżne do zera. Wtedy:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 2, \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = 1$$

Funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

Ćwiczenie 1

a) Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od -1 i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

Wówczas:

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(6 - 2x_n^2) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(6 - 2\cdot x_n \cdot x_n) =$

$= 6 - 2\cdot(-1)\cdot(-1) = 4$

Zatem $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 4$.

b) Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od 5 i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$.

Wówczas:

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{x_n+7}\right) =$

$= \frac{3}{5+7} = \frac{1}{4}$

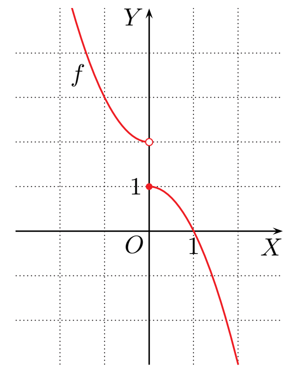
Zatem $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \frac{1}{4}$.

Zadania

D **1.** Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{dla } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Wykaż, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

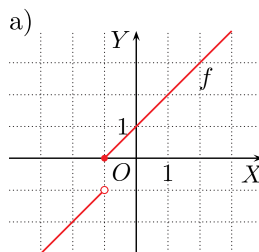


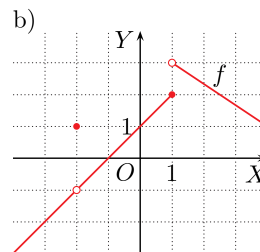
D **2.** Naszkicuj wykres funkcji sgn (signum) określonej wzorem:

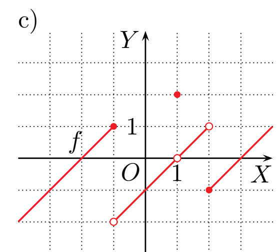
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Wykaż, że funkcja ta nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

D **3.** Na podstawie wykresu funkcji f określ, dla jakich x_0 nie istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Odpowiedź uzasadnij.

a)


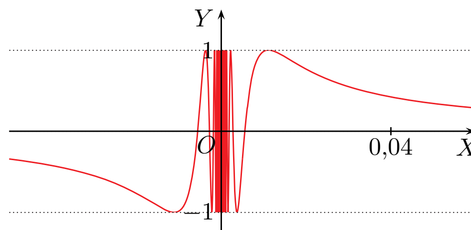
b)


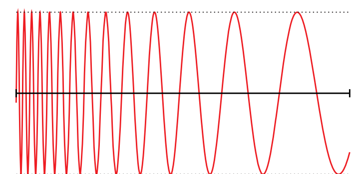
c)


D **4.** Uzasadnij, że funkcja f ma w x_0 granicę równą 6.

a) $f(x) = 2x + 4$, $x_0 = 1$ b) $f(x) = 4x^2 - 10$, $x_0 = 2$

D **5.** Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$. Wartości funkcji oscylują między -1 a 1, gdy x „zbliża się” do 0. Na rysunkach poniżej przedstawiono fragmenty wykresu funkcji f w przedziale $\langle -0{,}06; 0{,}06 \rangle$ i w przedziale $\langle 0{,}00015; 0{,}0006 \rangle$ odpowiednio przeskalowane.





Uzasadnij, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

Odpowiedzi do zadań

1. Niech $a_n = -\frac{1}{n}$ i $b_n = \frac{1}{n}$.

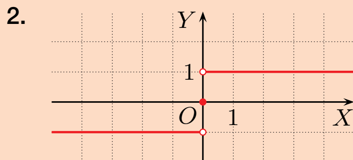
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n^2 + 2) = 2$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - b_n^2) = 1$

Zatem funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

2.



Niech $a_n = -\frac{1}{n}$ i $b_n = \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(a_n) = -1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(b_n) = 1$

Zatem funkcja sgn nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(b_n)$.

3. a) $x_0 = -1$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 \in \{-1, 2\}$

4. a) Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od 1 i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (2x_n + 4) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$. Zatem $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 6$.

b) Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od 2 i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (4x_n^2 - 10) = \lim\limits_{n\to\infty} (4 \cdot x_n \cdot x_n - 10) = 6$.
Zatem $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 6$.

5. Niech $a_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ i $b_n = \frac{1}{2\pi n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \frac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \frac{1}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0$

Zatem funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

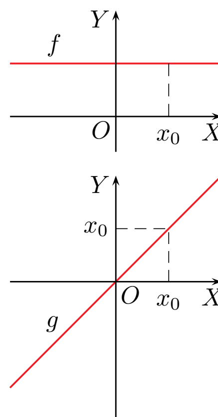
*4.2. Obliczanie granic funkcji

Korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, możemy wykazać, że dla funkcji stałej $f(x) = c$ dla dowolnego x_0 zachodzi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

Dla funkcji $g(x) = x$ dla dowolnego x_0 zachodzi:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = x_0$$

Przy obliczaniu granic często korzystamy z poniższego twierdzenia – jest ono wnioskiem z analogicznego twierdzenia dotyczącego granic ciągów (str. 200).



Uczeń:
- oblicza granice funkcji w punkcie, korzystając z twierdzenia o granicach: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji, które mają granice w tym punkcie,
- oblicza granicę funkcji $y = \sqrt{f(x)}$ w punkcie,
- oblicza granice funkcji w punkcie, stosując własności granic funkcji sinus i cosinus w punkcie.

Twierdzenie

Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, to:

- $\lim\limits_{x\to x_0} (cf(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \cdot a$, gdzie $c \in \mathbf{R}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a + b$ granica sumy funkcji
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a - b$ granica różnicy funkcji
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \cdot b$ granica iloczynu funkcji
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$, jeśli $b \neq 0$ granica ilorazu funkcji

Przykład 1

Oblicz granicę funkcji $f(x) = 2x^2 + 5$ w punkcie $x_0 = 3$.

$$\lim_{x\to 3}(2x^2+5) = \lim_{x\to 3} 2x^2 + \lim_{x\to 3} 5 = 2 \cdot \lim_{x\to 3} x^2 + 5 = 2 \cdot \lim_{x\to 3} x \cdot \lim_{x\to 3} x + 5 =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 = 23$$

Zauważ, że dla funkcji $f(x) = 2x^2 + 5$ mamy $f(3) = 2 \cdot 3^2 + 5 = 23$, czyli $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+5) = f(3)$.

Jeżeli funkcja f jest wielomianem, to:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ćwiczenie 1

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2 - x + 2)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$ c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)^{10}$

Ćwiczenie 1

a) $3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 2 = 16$
b) $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 = 8$
c) $(1^2 + 1)^{10} = 1024$

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.2

Generator testów i sprawdzianów

Przykład 2

Oblicz $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x+1}{x^2+2}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x+1}{x^2+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(5x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)} = \frac{6}{3} = 2$$

Zauważ, że dla funkcji $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+2}$ mamy $f(1) = 2$, czyli $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Jeśli f jest funkcją wymierną oraz x_0 należy do dziedziny tej funkcji, to $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli $f(x) = \frac{w(x)}{v(x)}$ jest funkcją wymierną, gdzie w, v są wielomianami, oraz $v(x_0) \neq 0$, to:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{w(x)}{v(x)} = \frac{w(x_0)}{v(x_0)}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-3}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3-x}{2x^2-10}$ c) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{4x^4-4x^2+1}{2x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x^3+4x-13}{x+7}$

Ćwiczenie 2

a) -5 **b)** -3 **c)** 7 **d)** $\frac{131}{11}$

Przykład 3

a) Oblicz $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x}$.

Dla $x = 3$ wielomiany w liczniku i mianowniku przyjmują wartość 0 – mamy tu do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\left[\frac{0}{0}\right]$, nie możemy więc skorzystać z powyższego twierdzenia. Zauważmy jednak, że w rozkładzie na czynniki obu wielomianów występuje czynnik $(x-3)$. Zatem:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x} = \frac{2}{3}$$

b) Oblicz $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$$

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{4x-x^3}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-x-12}{x^2-16}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^3-1}$

Ćwiczenie 3

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x(4-x^2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{x(2-x)(2+x)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} x(2-x) = -8$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x^2-2x+1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{x+3}{x+4} = \frac{7}{8}$

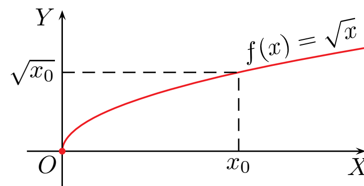
d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} = \frac{5}{3}$

Kolejne twierdzenie dotyczy granicy funkcji, w której wzorze występuje pierwiastek.

Jeśli $x_0 > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Ogólnie $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ dla:

- $x_0 > 0$, jeżeli n jest liczbą parzystą;
- $x_0 \in \mathbf{R}$, jeżeli n jest liczbą nieparzystą.



Ćwiczenie 4

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to 64} (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$ b) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ c) $\lim\limits_{x \to 0{,}001} (\sqrt[3]{x} + 100x)$

Ćwiczenie 4

a) 4 **b)** 4 **c)** 0,2

Twierdzenie

Jeśli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne i istnieje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, to:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

Przykład 4

Oblicz $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^2 + 5}$.

$\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$, zatem $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 5)} = \sqrt{9} = 3$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x - 4}$ b) $\lim\limits_{x \to -6} \frac{\sqrt{1 + 2x^2}}{\sqrt{|x| + 3}}$ c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^4 + 9}}{\sqrt{3x - 2}}$

Ćwiczenie 5

a) $-\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{73}}{3}$ **c)** $\frac{5}{2}$

Przykład 5

Oblicz $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$.

Zauważ, że $\lim\limits_{x \to 2}(\sqrt{2x} - 2) = 0$ oraz $\lim\limits_{x \to 2}(x - 2) = 0$. Aby obliczyć tę granicę, możemy postąpić następująco:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to 2} \left(\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x}+2} = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}$$

Przykład 6

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2$$

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

Zadania

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+x^2+3}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4-3x+8}{4x-x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x+2)^5}{7-x^2}$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-9x}{3-x}$ d) $\lim\limits_{x\to-6}\frac{x+6}{x^2+5x-6}$ g) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+9x+14}{x^2+3x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ e) $\lim\limits_{x\to\frac12}\frac{12x^2-8x+1}{4x^2-1}$ h) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3-x^2-12x}{2x+6}$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+3x-2}{x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$ i) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+7x-8}{x^3-1}$

3. Naszkicuj wykres funkcji f. Oblicz $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

a) $f(x)=\frac{4-2x}{x-2}$ b) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ c) $f(x)=\frac{3x-6}{2x-x^2}$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to25}\frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ c) $\lim\limits_{x\to2}\frac{1-\sqrt{3-x}}{2-x}$ e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

b) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ d) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{2x+6}$ f) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{1-\sqrt{x^2-3}}$

Twierdzenie

Dla dowolnego $x_0\in\mathbf{R}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

5. Oblicz granicę, korzystając z podanego wyżej twierdzenia.

a) $\lim\limits_{x\to\pi}(\sin x-\cos x)$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}+6\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)$

1. a) 5 **b)** -4 **c)** $\frac12$
2. a) -18 **b)** 2 **c)** -5 **d)** $-\frac17$
e) 1 **f)** $\frac25$ **g)** -5 **h)** $10\frac12$ **i)** 3
4. a) $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac14$ **c)** $-\frac12$ **d)** $\frac14$ **e)** 6 **f)** $-\frac52$
5. a) $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x-\lim\limits_{x\to\pi}\cos x=\sin\pi-\cos\pi=0-(-1)=1$
b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}+6=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}+6=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{\sqrt2}{2}}+6=7$
c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\operatorname{tg}^2 x-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^2-\left(\sqrt3\right)^2=-2\frac23$

Ćwiczenie 6

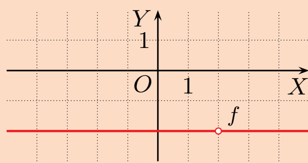
a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=$
$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=$
$=\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x}+1)=2$

b) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=$
$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$
$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$
$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3}=-\frac23$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}\cdot\right.$
$\left.\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\right)=$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{\sqrt2}{2}$

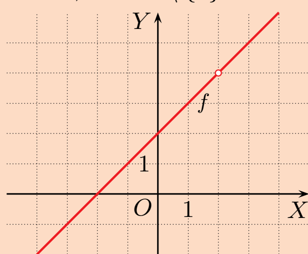
Odpowiedzi do zadań

3. a) $f(x)=\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$,
$D=\mathbf{R}\setminus\{2\}$



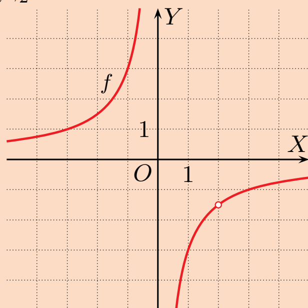
$\lim\limits_{x\to2}f(x)=-2$

b) $f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=$
$=x+2$, $D=\mathbf{R}\setminus\{2\}$



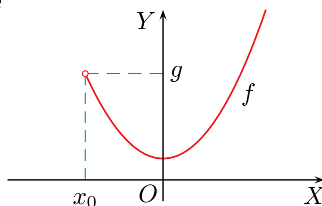
$\lim\limits_{x\to2}f(x)=4$

c) $f(x)=\frac{3(x-2)}{-x(x-2)}=-\frac{3}{x}$,
$D=\mathbf{R}\setminus\{0,2\}$
$\lim\limits_{x\to2}f(x)=-\frac32$



*4.3. Granice jednostronne

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$. Będziemy rozważać, do jakiej liczby „zbliża się” wartość funkcji, gdy x „zbliża się” do x_0 i $x \in (x_0; b)$. W tym przypadku mówimy, że x dąży do x_0 z prawej strony, i piszemy $x \to x_0^+$ (punkt x_0 może, ale nie musi, należeć do dziedziny funkcji).



Funkcja $y = f(x)$ ma w x_0 granicę prawostronną równą g, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$.

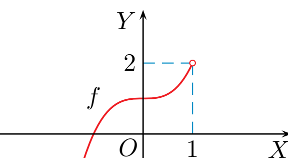
Uczeń:
- oblicza granice jednostronne funkcji w punkcie,
- stosuje twierdzenie o związku między wartościami granic jednostronnych w punkcie a granicą funkcji w punkcie.

Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$.
Liczba g jest **granicą prawostronną** funkcji f w punkcie x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, gdzie $x_n \in (x_0; b)$, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Ćwiczenie 1

Niech f będzie funkcją określoną w przedziałe $(a; x_0)$. Sformułuj definicję **granicy lewostronnej** funkcji f w punkcie x_0: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.



Funkcja $y = f(x)$ ma w $x_0 = 1$ granicę lewostronną równą 2, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

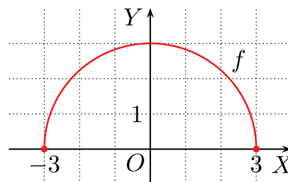
Granica prawostronna funkcji oraz granica lewostronna funkcji nazywane są **granicami jednostronnymi** funkcji f w punkcie x_0.

Ćwiczenie 1
Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a; x_0)$.
Liczba g jest **granicą lewostronną** funkcji f w punkcie x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, gdzie $x_n \in (a; x_0)$, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji danej wzorem $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, gdzie $x \in \langle -3; 3 \rangle$. Granice funkcji na krańcach dziedziny:

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 0$$

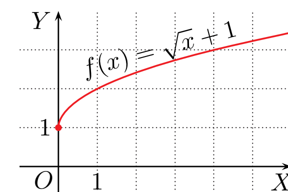


Przy obliczaniu granic jednostronnych stosuje się analogiczne metody i twierdzenia, jak w przypadku obliczania granic.

Przykład 2

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x} + 1) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} + \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 0 + 1 = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{6}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}} = \frac{6}{2} = 3$



Ćwiczenie 2

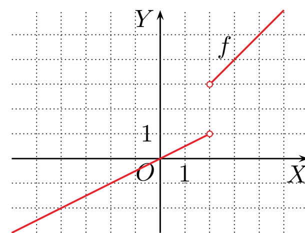
Oblicz granicę jednostronną.

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-16}+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$

Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ x+1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



W punkcie $x_0 = 2$ można obliczyć obie granice jednostronne funkcji f:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\tfrac{1}{2}x\right) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 3$$

Zauważ jednak, że $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$. Funkcja f ma obie granice jednostronne, ale nie ma granicy w punkcie $x_0 = 2$.

Twierdzenie

Granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ oraz zachodzi równość:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Zatem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$.

Zadania

1. Oblicz granicę jednostronną.

a) $\lim\limits_{x\to 4^+} \left(\sqrt{x-4}+2\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ g) $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$

b) $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2+5x+6}{2x^2-8}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ h) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{\sqrt{3-x}+1}$

2. Naszkicuj wykres funkcji f. Oblicz $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$. Czy istnieje $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$?

a) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ 3 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x < -1 \\ x^3-1 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{dla } x < -1 \\ x^2-1 & \text{dla } x \geqslant -1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^3+4 & \text{dla } x < -1 \\ 4-x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

Ćwiczenie 2

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x(x-1)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x(x-1)\sqrt{x}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} ((x-1)\sqrt{x}) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-(2-x)}{\sqrt{4-x^2}} =$

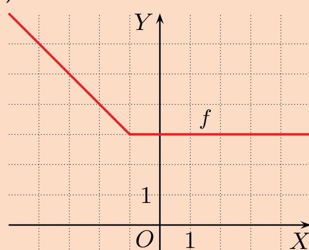
$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{2-x}}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} = 0$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 2 **b)** $-\frac{1}{8}$ **c)** 1 **d)** -1 **e)** 2 **f)** $\frac{1}{5}$ **g)** 0 **h)** 1

2. a)



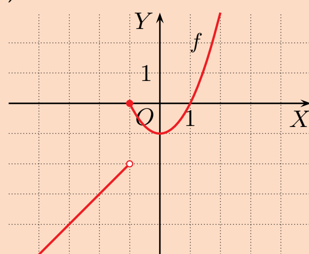
$\lim\limits_{x\to -1^-} (-x+2) = 3$

$\lim\limits_{x\to -1^+} 3 = 3$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Zatem $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ istnieje.

b)



$\lim\limits_{x\to -1^-} (x-1) = -2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} (x^2-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

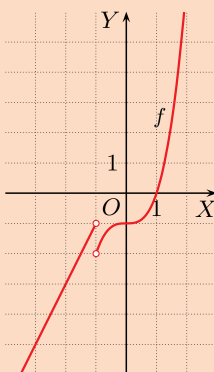
Zatem $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ nie istnieje.

c) $\lim\limits_{x\to -1^-} (2x+1) = -1$

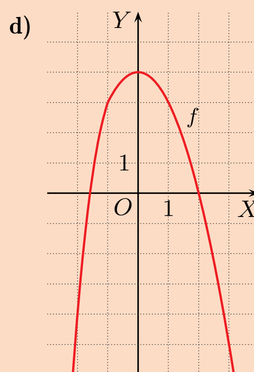
$\lim\limits_{x\to -1^+} (x^3-1) = -2$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Zatem $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ nie istnieje.



d)



$\lim\limits_{x\to -1^-} (x^3+4) = 3$

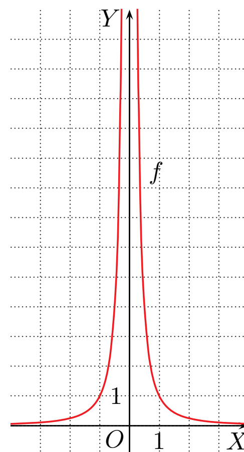
$\lim\limits_{x\to -1^+} (4-x^2) = 3$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Zatem $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ istnieje.

*4.4. Granice niewłaściwe

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ (wykres obok). Zauważmy, że dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) takiego, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.



Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu x_0.
Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** ∞ $(\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty)$, jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞.

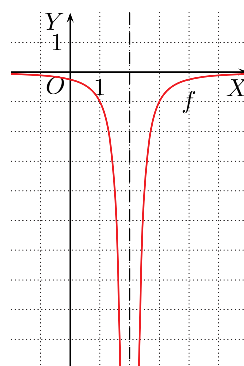
Ćwiczenie 1

Sformułuj definicję **granicy niewłaściwej** równej $-\infty$ funkcji f w punkcie x_0.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ (rysunek obok), ma w punkcie $x_0 = 2$ granicę niewłaściwą równą $-\infty$, co zapisujemy:

$$\lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$



Ćwiczenie 2

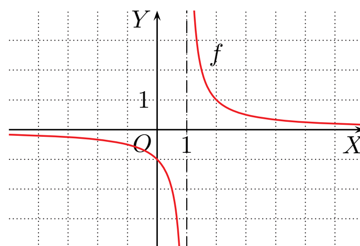
Naszkicuj wykres funkcji f. Dla jakiego $x_0 \in \mathbf{R}$ ma ona granicę niewłaściwą równą $-\infty$?

a) $f(x) = \frac{-1}{|x-1|}$ b) $f(x) = \frac{-4}{|x+2|}$

Przykład 2

Dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$ (rysunek obok), nie istnieje granica $\lim_{x\to 1} f(x)$. Istnieją natomiast **granice niewłaściwe jednostronne** w punkcie $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$



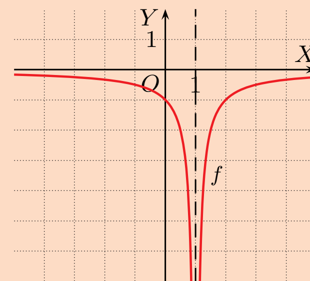
Uczeń:
- wyznacza granice niewłaściwe jednostronne funkcji w punkcie,
- wyznacza granice niewłaściwe funkcji w punkcie,
- wyznacza równania asymptot pionowych wykresu funkcji.

Ćwiczenie 1

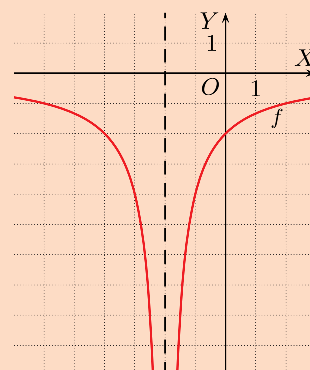
Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu x_0.
Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** $-\infty$ $(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$, jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $-\infty$.

Ćwiczenie 2

a) $\lim_{x\to 1} \frac{-1}{|x-1|} = -\infty$



b) $\lim_{x\to -2} \frac{-4}{|x+2|} = -\infty$



Multiteka
- Asymptoty pionowe funkcji
- Wybrane krzywe i ich asymptoty

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.4

Generator testów i sprawdzianów

Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$. Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą prawostronną** ∞ $\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty\right)$, jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, gdzie $x_n \in (x_0; b)$, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞.

Uwaga. Analogicznie definiujemy granice:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Będziemy stosować następujące oznaczenia:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ oznacza, że $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ oraz $f(x) > 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0;
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ oznacza, że $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ oraz $f(x) < 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0.

Twierdzenie

- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a > 0$, to $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a < 0$, to $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a > 0$, to $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a < 0$, to $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$.

Uwaga. Analogiczne własności zachodzą dla granic jednostronnych.

Przykład 3

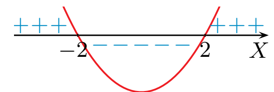
Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-6}{x^2-4} \overset{\left[\frac{-4}{0^+}\right]}{=} -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} (x^2-4) = 0$ oraz
$x^2-4 > 0$ dla $x \in (2; \infty)$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-6}{x^2-4} \overset{\left[\frac{-4}{0^-}\right]}{=} \infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-4) = 0$ oraz
$x^2-4 < 0$ dla $x \in (-2; 2)$



Aby ustalić znak mianownika, można naszkicować wykres funkcji $y = x^2-4$.

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x-4}{3-x}$ d) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x+1}{x^2-4}$

Ćwiczenie 3

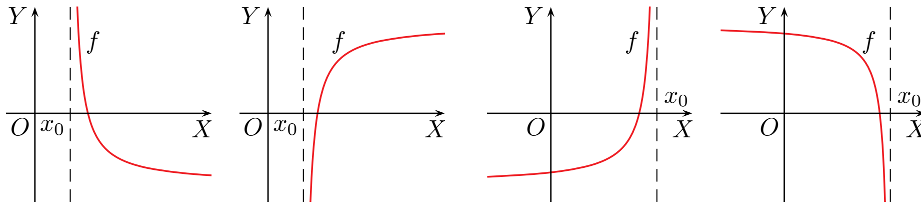
a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} \overset{\left[\frac{3}{0^+}\right]}{=} \infty$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x-1} \overset{\left[\frac{3}{0^-}\right]}{=} -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x-4}{3-x} \overset{\left[\frac{-1}{0^+}\right]}{=} -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x+1}{x^2-4} \overset{\left[\frac{-1}{0^-}\right]}{=} \infty$

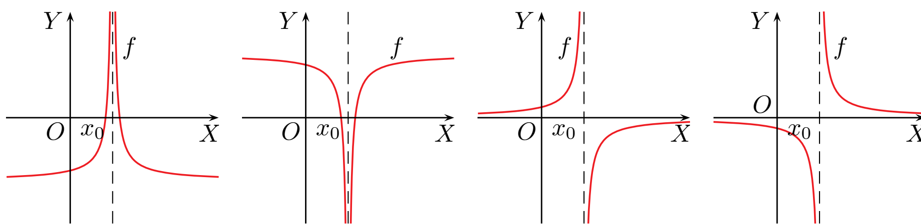
Asymptoty pionowe wykresu funkcji



Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową prawostronną** wykresu funkcji f.

Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną** wykresu funkcji f.

Jeśli obie granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 są niewłaściwe, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową obustronną** (lub krótko – asymptotą pionową) wykresu funkcji f (patrz wykresy poniżej).



Istnienie asymptot pionowych w przypadku funkcji wymiernej badamy w miejscach zerowych mianownika.

Przykład 4

Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x+1}{x^2} = \infty$, zatem prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f.

Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji f i wyznacz asymptoty pionowe jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że wykres funkcji f nie ma asymptoty pionowej w punkcie x_0. Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{1-4x^2}{2x-1}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}$, $x_0 = 2$

Ćwiczenie 4

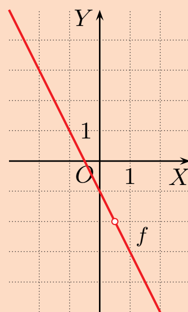
a) $D = \mathbf{R} \setminus \{4\}$
$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \infty$
asymptota pionowa: $x = 4$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$
$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \infty$
$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$
asymptota pionowa: $x = -2$

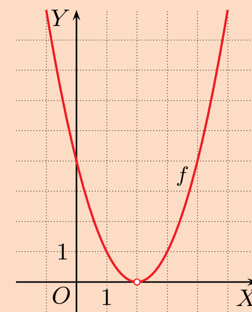
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$
$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \infty$
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \infty$
asymptoty pionowe:
$x = -3$, $x = 3$

Ćwiczenie 5

a) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{(1-2x)(1+2x)}{-(1-2x)} =$
$= \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (-1-2x) = -2$,
więc funkcja nie ma asymptoty pionowej w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$.



b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^3-8)-6x(x-2)}{x-2} =$
$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)-6x(x-2)}{x-2} =$
$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-4x+4)}{x-2} =$
$= \lim\limits_{x\to 2} (x-2)^2 = 0$,
więc funkcja nie ma asymptoty pionowej w punkcie $x_0 = 2$.



Twierdzenie

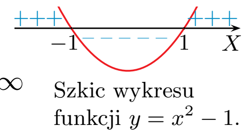
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=-\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$, to $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$, to $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=-\infty$.

Uwaga. W przypadku, gdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, wyznaczenie granicy $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ wymaga szczegółowych badań (mamy wówczas do czynienia z symbolem nieoznaczonym $[\infty-\infty]$).

Przykład 5

Oblicz $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$.

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)\overset{[\infty-\infty]}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{(x+1)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-1}\overset{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=}\infty$$



Szkic wykresu funkcji $y=x^2-1$.

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-4}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4}\right)$

Zadania

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to5^+}\frac{1-x}{5-x}$

b) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-3}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x+3}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{4x+1}{x^2-x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{x+1}{x^2+4x+3}$

f) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2+x-7}{2x-x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x+1}\right)$

2. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{x^2-5}{x+2}$

b) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-4}$

c) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$

d) $f(x)=\frac{6x+2}{1-9x^2}$

e) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

f) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-6x+8}$

3. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x^2}$

b) $f(x)=\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x-3}$

c) $f(x)=\frac{x}{|x-3|-|x-1|}$

Ćwiczenie 6

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-4}\right)\overset{[\infty+\frac{1}{2}]}{=}\infty$

b) $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)(x+2)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{4}{(x-2)^2(x+2)}\right)\overset{\left[\frac{4}{0^+}\right]}{=}\infty$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\lim\limits_{x\to5^+}\frac{1-x}{5-x}\overset{\left[\frac{-4}{0^-}\right]}{=}\infty$

b) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-3}{x-2}\overset{\left[\frac{1}{0^-}\right]}{=}-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x+3}{x^2-1}\overset{\left[\frac{2}{0^-}\right]}{=}-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{4x+1}{(x-2)(x+1)}\overset{\left[\frac{-3}{0^-}\right]}{=}\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{x+1}{(x+3)(x+1)}\overset{\left[\frac{-2}{0^-}\right]}{=}\infty$

f) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2+x-7}{x(2-x)}\overset{\left[\frac{-1}{0^+}\right]}{=}-\infty$

g) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)\overset{\left[\frac{-1}{0^+}\right]}{=}-\infty$

h) $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{x-1}{(x-2)^2}\right)\overset{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=}\infty$

i) $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{3-2x}{x^2-1}\right)\overset{\left[\frac{5}{0^-}\right]}{=}-\infty$

2. Wszystkie asymptoty są obustronne.

a) $x=-2$

b) $x=-2$, $x=2$

c) $f(x)=\frac{1}{x+3}$, $x=-3$

d) $f(x)=\frac{2}{1-3x}$, $x=\frac{1}{3}$

e) $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$, $x=-1$

f) $f(x)=\frac{x+2}{x-4}$, $x=4$

3. a) $D=\langle0;\infty)\setminus\{1\}$, asymptota pionowa: $x=1$

b) $D=\langle-1;2\rangle$, brak asymptot pionowych

c) $D=\mathbf{R}\setminus\{2\}$, asymptota pionowa: $x=2$

Warto wiedzieć

Krzywe płaskie i ich asymptoty

Niektóre krzywe płaskie niebędące wykresami funkcji mają asymptoty pionowe.

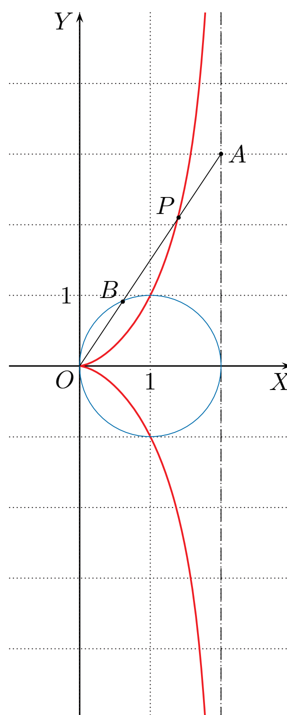
Taką krzywą jest na przykład **cisoida Dioklesa** dana równaniem:

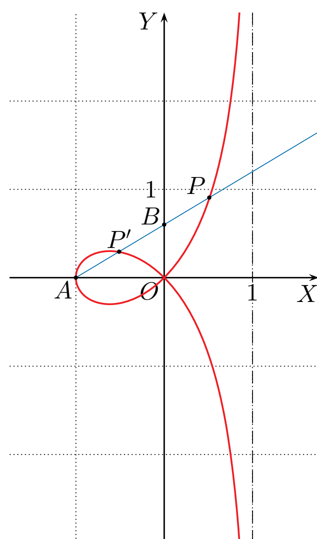
$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}, \text{ gdzie } a > 0$$

Jej asymptotą pionową jest prosta $x = a$.

Aby wyznaczyć punkt P należący do cisoidy Dioklesa dla $a = 2$, postępujemy następująco:

- Rysujemy odcinek łączący punkt $O(0,0)$ z dowolnym punktem A leżącym na prostej $x = 2$.
- Odcinek OA przecina okrąg o środku w punkcie $(1,0)$ i promieniu 1 w punkcie B.
- Na odcinku OA wyznaczamy punkt P taki, że $|OP| = |AB|$.





Inną krzywą płaską mającą asymptotę pionową jest **strofoida**. Jest ona dana równaniem:

$$y^2 = \frac{a+x}{a-x}x^2, \text{ gdzie } a > 0$$

Jej asymptotą pionową jest prosta $x = a$.

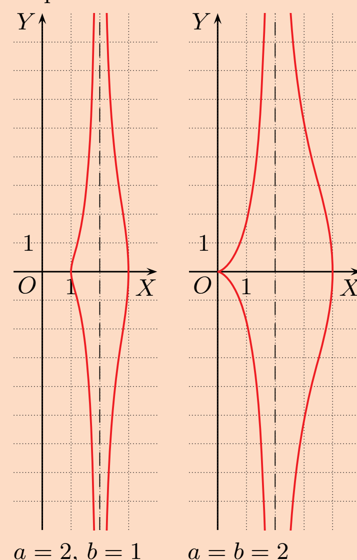
Na rysunku obok przedstawiono strofoidę dla $a = 1$.

Strofoida ta jest zbiorem wszystkich punktów P leżących na półprostych wychodzących z punktu $A(-1,0)$, przecinających oś OY w punkcie $B(0,b)$ takich, że $|BP| = |BO| = |b|$ (zwróć uwagę na to, że dla każdej półprostej AB są dwa takie punkty P i P'.)

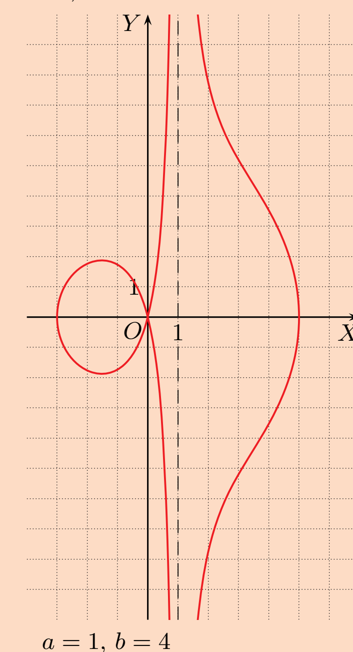
1. Wyszukaj w dostępnych źródłach informacje o następujących krzywych płaskich: **konchoida Nikomedesa**, **ofiuryda** (ogon węża), **panstrofoida**. Korzystając z odpowiedniego programu komputerowego lub kalkulatora graficznego, naszkicuj te krzywe i ich asymptoty.

Odpowiedzi do zadań

1. **Konchoida Nikomedesa** dana jest równaniem $(x-a)^2(x^2+y^2) - bx^2 = 0$. Jej asymptotą pionową jest prosta $x = a$.

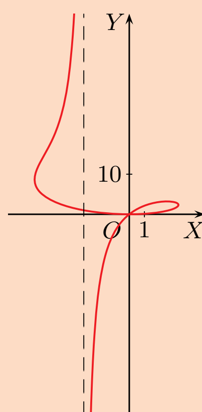


$a = 2$, $b = 1$ $a = b = 2$

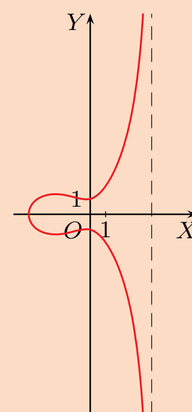


$a = 1$, $b = 4$

Ofiuryda określona jest równaniem $x(x^2+y^2) - y(ax - by) = 0$, gdzie $a, b > 0$.
Jej asymptotą pionową jest prosta $x = -b$.
Na rysunku obok przedstawiono wykres ofiurydy dla $a = 9$ i $b = 3$.



Panstrofoida określona jest równaniem $y^2 = \frac{(x+a)(x^2+b^2)}{x-a}$, gdzie $a, b > 0$.
Jej asymptotą pionową jest prosta $x = a$.
Na rysunku obok przedstawiono wykres panstrofoidy dla $a = 4$ i $b = 1$.



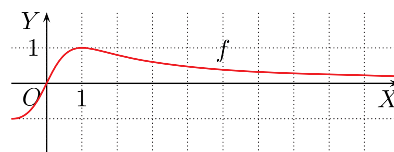
Uczeń:

- wyznacza granice funkcji w nieskończoności,
- stosuje różne metody wyznaczania granicy odpowiednio w ∞ i w $-\infty$,
- wyznacza równania asymptot poziomych wykresu funkcji,
- udowadnia, że funkcja nie ma granicy w nieskończoności.

*4.5. Granica funkcji w nieskończoności

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Rozpatrzmy ciąg argumentów (x_n) taki, że $x_n \to \infty$. Wówczas ciąg odpowiadających im wartości funkcji $(f(x_n))$ ma granicę równą zero.



Definicja

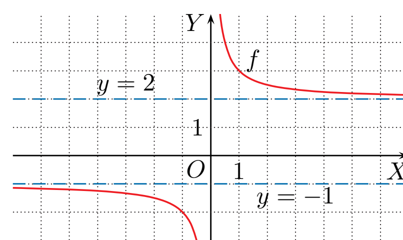
Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a;\infty)$. Liczba g jest granicą funkcji f w ∞ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do ∞, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Ćwiczenie 1

Sformułuj definicję $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$.

Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$, to prostą $y = k$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w ∞.

Jeśli $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, to prostą $y = l$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w $-\infty$.



Wykres funkcji f ma w ∞ asymptotę poziomą $y = 2$, a w $-\infty$ – asymptotę poziomą $y = -1$.

Przykład 2

Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji $f(x) = \frac{3-x^2}{2x^2+4}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2}{2x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x^2}-1}{2+\frac{4}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x^2}{2x^2+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Wykres funkcji f ma w ∞ oraz w $-\infty$ asymptotę poziomą $y = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji f.

a) $f(x) = \frac{6-4x}{1+2x}$ b) $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+2}$ c) $f(x) = \frac{2|x|+1}{x}$

Ćwiczenie 1

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(-\infty;b)$. Liczba g jest granicą funkcji f w $-\infty$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do $-\infty$, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Ćwiczenie 2

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{6}{x}-4}{\frac{1}{x}+2} = -2$, asymptota pozioma w $\pm\infty$: $y = -2$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = 3$, asymptota pozioma w $\pm\infty$: $y = 3$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1} = 2$, asymptota pozioma w ∞: $y = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x+1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1} = -2$, asymptota pozioma w $-\infty$: $y = -2$

Multiteka
- Asymptoty poziome funkcji

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.5

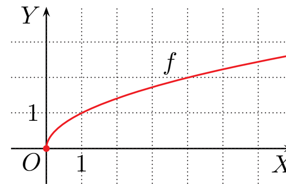
Generator testów i sprawdzianów

Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a;\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do ∞, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞.

Przykład 3

Funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ (wykres obok) ma w ∞ granicę niewłaściwą równą ∞.



Ćwiczenie 3

Sformułuj definicję:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f i określ granice $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$

Twierdzenie

Dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

- $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -\infty & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ dla n nieparzystych

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^{10}}{x^5}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(-x^3)^2}{x^4}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}$

Twierdzenie

- Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = a > 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x)) = \infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = a < 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x)) = -\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = a > 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x)) = -\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = a < 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x)) = \infty$.

Ćwiczenie 3

a) Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a;\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą $-\infty$ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do ∞, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $-\infty$.

b) Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(-\infty;b)$. Funkcja f ma w $-\infty$ granicę niewłaściwą ∞ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do $-\infty$, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞.

c) Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(-\infty;b)$. Funkcja f ma w $-\infty$ granicę niewłaściwą $-\infty$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do $-\infty$, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $-\infty$.

Ćwiczenie 4

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Ćwiczenie 5

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[10]{x^3} = \infty$

Przykład 4

$$\lim_{x\to\infty}(2x^3-6x^2-1)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(2-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^3=\infty$ oraz

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=2$

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(100+x-x^3)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4}{10}+2x^3+x^2\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x)^3$

Przykład 5

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+1}{6x^3-4x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{6-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{2x^2-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}}=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-1}{x^3+x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$

Aby obliczyć te granice, dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę x z mianownika.

Ćwiczenie 7

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2+2x}{1-x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+4}{x^4+x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-10}{x+\sqrt{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2+7}{x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-1}{(x^2-1)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{4\sqrt{x}-x}$

Zadania

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^5-x^3+3)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+\frac{1}{x})$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)^4$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{x^3-3x+2}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{x^5-1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-6x}{2x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^4-x^3+1}{x-2x^4}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2+9}{1-2x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+x+1}{x-3x^2}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+3}{1-x^3}$ k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x-1}{2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-2x+1}{1-x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-x^2}{x^3+3x-7}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x-1}{3-x^2}$

3. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(1-x)}{(1-6x)(x+1)}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(2x+1)(3x-1)}{(x+1)(x^2-4)}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2(4x-1)}{(2x-1)^2(3-x)}$

Ćwiczenie 6

a) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\frac{100}{x^3}+\frac{1}{x^2}-1\right)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^9\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3=-\infty$

Ćwiczenie 7

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}=3$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+\frac{7}{x}}{1+\frac{2}{x}}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x^3}+\frac{4}{x^4}}{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x^4}}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}=1$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-\frac{10}{x}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=4$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-1\right)x}=0$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $-\infty$ **b), c)** ∞

2. a) 4 **b)** -3 **c)** -2 **d)** -5
e) 2 **f)** -2 **g), h), i)** 0
j) $-\infty$ **k), l)** ∞

3. a) $\frac{1}{6}$ **b)** 6 **c)** -1

4. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

5. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{-x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)$

6. Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ c) $f(x)=\frac{1-6x^2}{2x^2+x-1}$ e) $f(x)=\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-1}}$

b) $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+x+1}$ d) $f(x)=\frac{5x^4-x^2+1}{x^4+1}$ f) $f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3-x}}$

7. Wyznacz asymptoty poziome i pionowe wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$ d) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ g) $f(x)=\frac{2x^2+x}{x^2-x-2}$

b) $f(x)=\frac{2x-1}{4-x}$ e) $f(x)=\frac{-3}{9-x^2}$ h) $f(x)=\frac{1-x}{x^2-4x-5}$

c) $f(x)=\frac{1-6x}{2-3x}$ f) $f(x)=\frac{5-x}{x^2-25}$ i) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^3+x-2}$

8. Wyznacz asymptoty poziome i pionowe wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\sqrt{\frac{1-4x}{1-x}}$ b) $f(x)=\sqrt{\frac{9x-1}{x-1}}$ c) $f(x)=\sqrt{\frac{1-16x^2}{4-x^2}}$

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}=$$

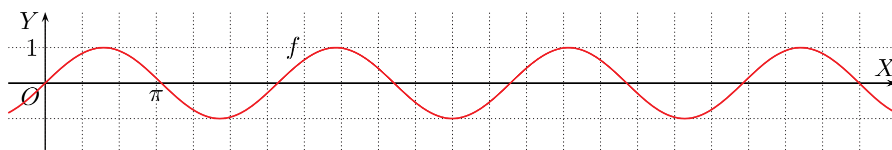
$|x|=-x$ dla $x<0$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=-1$$

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{8x^3+3}}$

D **10.** Uzasadnij, że funkcja $f(x)=\sin x$ nie ma granicy w ∞.



4. a) 0 **b)** ∞ **c)** 0

5. a) ∞ **b)** ∞ **c)** ∞

6. a) $y=0$ w $\pm\infty$
b) $y=2$ w $\pm\infty$
c) $y=-3$ w $\pm\infty$
d) $y=5$ w $\pm\infty$
e) $y=1$ w ∞
f) $y=1$ w $-\infty$

7. a) $x=1$ – pionowa obustronna, $y=1$ – pozioma w $\pm\infty$
b) $x=4$ – pionowa obustronna, $y=-2$ – pozioma w $\pm\infty$
c) $x=\frac{2}{3}$ – pionowa obustronna, $y=2$ – pozioma w $\pm\infty$
d) $x=-2$, $x=2$ – pionowe obustronne, $y=0$ – pozioma w $\pm\infty$
e) $x=-3$, $x=3$ – pionowe obustronne, $y=0$ – pozioma w $\pm\infty$
f) $x=-5$ – pionowa obustronna, $y=0$ – pozioma w $\pm\infty$
g) $x=-1$, $x=2$ – pionowe obustronne, $y=2$ – pozioma w $\pm\infty$
h) $x=-1$, $x=5$ – pionowe obustronne, $y=0$ – pozioma w $\pm\infty$
i) $y=1$ – pozioma w $\pm\infty$

8. a) $D_f=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right\rangle\cup(1;\infty)$, $y=2$ – pozioma w $\pm\infty$, $x=1$ – pionowa prawostronna
b) $D_f=\left(-\infty;\frac{1}{9}\right\rangle\cup(1;\infty)$, $y=3$ – pozioma w $\pm\infty$, $x=1$ – pionowa prawostronna
c) Niech $t=x^2\geqslant 0$ i $t\neq 4$. Wtedy $(1-16t)(4-t)\geqslant 0$ dla $t\leqslant\frac{1}{16}$ lub $t>4$. Zatem $D_f=(-\infty;-2)\cup\cup\left\langle-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right\rangle\cup(2;\infty)$, $y=4$ – pozioma w $\pm\infty$, $x=2$ – pionowa prawostronna, $x=-2$ – pionowa lewostronna

9. a) 2 **b)** -2 **c)** $\frac{1}{2}$

10. Niech $a_n=n\pi$ i $b_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$. Wówczas:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\pi)=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$

Zatem funkcja f nie ma granicy w ∞, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)$.

Uczeń:
- sprawdza, czy funkcja jest ciągła w danym punkcie,
- bada ciągłość funkcji,
- wyznacza wartości parametrów, dla których funkcja jest ciągła w danym punkcie lub przedziale.

*4.6. Ciągłość funkcji

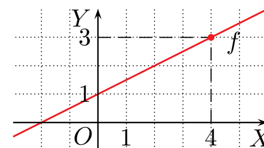
Definicja

Funkcja $f\colon (a;b) \to \mathbf{R}$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in (a;b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Uwaga. Analogiczną definicję przyjmujemy dla funkcji określonej w przedziale $(-\infty;b)$, $(a;\infty)$ lub w $\mathbf{R}$.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 4$, gdyż $\lim\limits_{x\to 4}(\frac{1}{2}x+1) = 3$ oraz $f(4) = 3$.

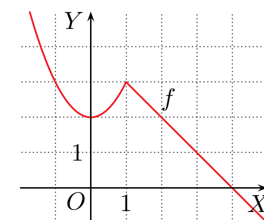


D
Przykład 2

Wykaż, że funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 4-x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$.



Obliczamy granice jednostronne w punkcie $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+2) = 3, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(4-x) = 3$$

Istnieje więc granica: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$. Ponadto $f(1) = 3$, więc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Funkcja f jest zatem ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

D
Ćwiczenie 1

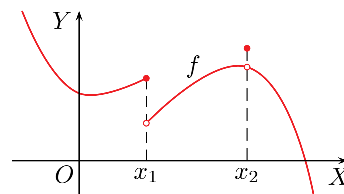
Wykaż, że funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$, i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \begin{cases} 6-x^2 & \text{dla } x < 2 \\ x & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{dla } x < 2 \\ (x-3)^3 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

Przykład 3

Funkcja f, której wykres przedstawiony jest na rysunku obok, nie jest ciągła w punkcie:
- x_1, gdyż $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$ nie istnieje;
- x_2, gdyż $\lim\limits_{x\to x_2} f(x) \neq f(x_2)$.



Jeśli funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 \in D_f$, to mówimy, że jest **nieciągła w punkcie** x_0.

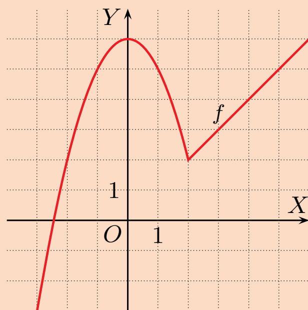
Ćwiczenie 1

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(6-x^2) = 2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x = 2$

Zatem $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$ oraz $f(2) = 2$, więc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

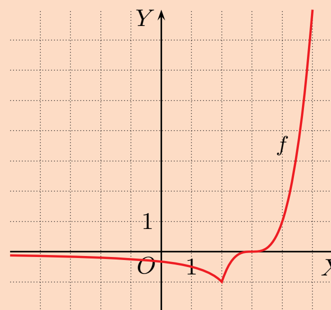


b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-3} = -1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x-3)^3 = -1$

Zatem $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -1$ oraz $f(2) = -1$, więc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.



D **Ćwiczenie 2**

Wykaż, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leqslant 0 \\ x^2+1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

Przykład 4

Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-1}{4x-2} & \text{dla } x \neq \frac{1}{2} \\ a & \text{dla } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Obliczamy granicę:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{4x-2} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2(2x-1)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{2} = 1$$

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\frac{1}{2}) = 1$, czyli dla $a = 1$.

Ćwiczenie 3

Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+4}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ a & \text{dla } x = 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^3-x^2-x & \text{dla } x \neq 2 \\ a^2 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

Definicja

Funkcję $f\colon (a;b) \to \mathbf{R}$ nazywamy **ciągłą**, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(a;b)$.

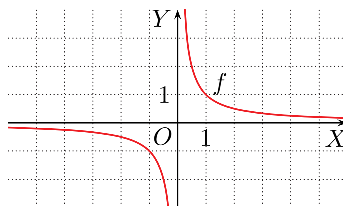
Uwaga. Analogicznie definiujemy funkcję ciągłą określoną w przedziale $(-\infty;b)$, $(a;\infty)$ lub w $\mathbf{R}$.

Jeśli funkcja f jest nieciągła w choćby jednym punkcie dziedziny, to mówimy, że jest **nieciągła**.

Jeśli dziedziną funkcji f jest zbiór będący sumą przedziałów otwartych, to mówimy, że funkcja ta jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym z tych przedziałów.

Przykład 5

Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ określona na zbiorze $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ jest ciągła, ponieważ jest ciągła w każdym z przedziałów $(-\infty;0)$ oraz $(0;\infty)$.

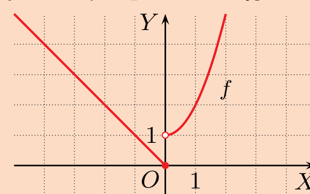


Ćwiczenie 2

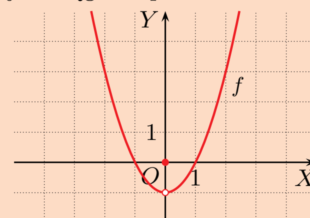
a) $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (-x) = 0$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (x^2+1) = 1$

Nie istnieje granica funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, czyli funkcja nie jest w tym punkcie ciągła.



b) $\lim_{x\to0} f(x) = -1$ oraz $f(0) = 0$, czyli $\lim_{x\to0} f(x) \neq f(0)$, zatem funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.



Ćwiczenie 3

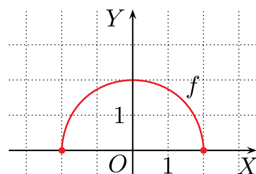
a) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)^2}{x-2} =$
$= \lim_{x\to2}(x-2) = 0$, zatem funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$ dla $a = 0$.

b) $\lim_{x\to2} f(x) =$
$= \lim_{x\to2}(x^3-x^2-x) = 2$, zatem funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$ dla $a^2 = 2$, czyli gdy $a = -\sqrt{2}$ lub $a = \sqrt{2}$.

Funkcję $f: \langle a; b\rangle \to \mathbf{R}$ nazywamy **ciągłą w przedziale domkniętym** $\langle a; b\rangle$, jeżeli jest ciągła w przedziale $(a; b)$ oraz:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

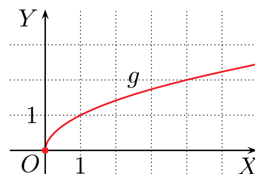
Uwaga. Analogicznie definiujemy ciągłość funkcji w przedziałach postaci $\langle a; b)$ i $(a; b\rangle$ oraz $\langle a; \infty)$ i $(-\infty; b\rangle$.



$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$

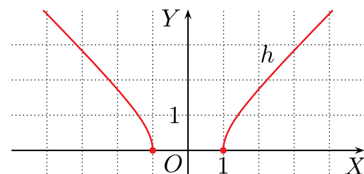
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

Funkcja $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ określona w przedziale $\langle -2; 2\rangle$ jest ciągła.



$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$

Funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ określona w przedziale $\langle 0; \infty)$ jest ciągła.



$\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = h(-1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = h(1)$

Funkcja $h(x) = \sqrt{x^2-1}$ określona na zbiorze $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$ jest ciągła.

Twierdzenie

Jeśli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to funkcja:

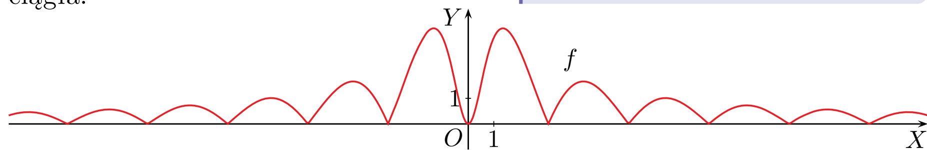
- $f+g$ jest ciągła w punkcie x_0,
- $f-g$ jest ciągła w punkcie x_0,
- $f\cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0,
- $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0 pod warunkiem, że $g(x_0) \neq 0$.

Funkcjami ciągłymi są między innymi wielomiany, funkcje wymierne, funkcje wykładnicze i logarytmiczne, funkcje trygonometryczne (sinus, cosinus, tangens, cotangens) oraz funkcje otrzymane z powyższych w wyniku operacji arytmetycznych.

Przykład 6

Funkcja $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określona wzorem $f(x) = \left|\frac{8x\sin x}{x^2+1}\right|$ (wykres poniżej) jest ciągła.

Jeśli funkcja f jest ciągła, to funkcja $y = |f(x)|$ również jest ciągła.



Zadania

D **1.** Wykaż na podstawie definicji, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.

a) $f(x) = 2x^2 + 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x_0 = 1$

2. Zbadaj ciągłość funkcji f.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \leqslant 3 \\ 4x+1 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{4x-x^2}{x-4} & \text{dla } x \neq 4 \\ 0 & \text{dla } x = 4 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2x^2}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{dla } x \neq 3 \\ 4 & \text{dla } x = 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{1-x} & \text{dla } x \neq 1 \\ 3 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{1-x^2} & \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \\ 1 & \text{dla } x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

3. Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła?

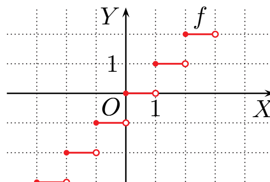
a) $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 3x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{dla } x < 3 \\ x-6 & \text{dla } x \geqslant 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{dla } x < 2 \\ 2x - a^2 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + a^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ \frac{3}{x} - a & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

D **4.** Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = [x]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Podaj, dla jakich argumentów $x \in \mathbf{R}$ funkcja ta nie jest ciągła. Odpowiedź uzasadnij.



5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x}{x^2-x} & \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \\ a^3 - 7 & \text{dla } x = 0 \\ 2\sin b & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} & \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\} \\ a^2 - \frac{1}{6}a & \text{dla } x = -2 \\ \frac{1}{3}\cos b & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

6. Dla jakich wartości parametrów a, b i c funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x^2+x-6} & \text{dla } x < -3 \\ b-1 & \text{dla } x = -3 \\ c|x+1| & \text{dla } x > -3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-4} & \text{dla } x < 2 \\ bx+1 & \text{dla } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-c}{x-3} & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

Odpowiedzi do zadań

1. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x^2+1) = \frac{3}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$
Zatem funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{x-2} = -2 = f(1)$
Zatem funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.

2. a), b), c), e), f) nieciągła
d) ciągła

3. a) $a = 2$ **b)** $a = 4$ **c)** $a = -3$ lub $a = 1$ **d)** $a = -3$ lub $a = 1$

4. Funkcja f nie jest ciągła dla $x \in \mathbf{Z}$, bo w tych punktach nie istnieje granica funkcji f.

5. a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3-x}{x^2-x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x^2-1)}{x(x-1)} =$
$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} =$
$= \lim\limits_{x \to 0}(x+1) = 1,$
zatem funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$ dla $a^3 - 7 = 1$, czyli dla $a = 2$.
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-x}{x^2-x} = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2,$
zatem funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$ dla $2\sin b = 2$, czyli $b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

b) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}\right) =$
$= \lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+5-9}{(x^2-4)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} =$
$= \lim\limits_{x \to -2} \frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{1}{6},$
zatem funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = -2$ dla $a^2 - \frac{1}{6}a = \frac{1}{6}$, czyli dla $a = -\frac{1}{3}$ lub $a = \frac{1}{2}$.
$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} =$
$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{1}{6},$
zatem funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$ dla $\frac{1}{3}\cos b = \frac{1}{6}$, czyli dla $b = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $b = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

6. a) $f(-3) = b - 1$
$\lim\limits_{x \to -3^+} (c|x+1|) = 2c$
$\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{x+a}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x \to -3^-} \frac{x+a}{(x+3)(x-2)}$
Zauważmy, że dla $a \neq 3$ granica $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ jest niewłaściwa,
zatem $a = 3$ i wtedy $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{x+3}{(x+3)(x-2)} = \lim\limits_{x \to -3^-} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{5}$
$b - 1 = 2c = -\frac{1}{5}$, czyli $b = \frac{4}{5}$ i $c = -\frac{1}{10}$
b) $a = -1$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = 2$

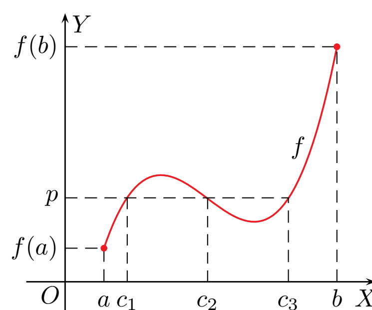
Uczeń:
- stosuje twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich (własność Darboux) do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i wyznaczania jego przybliżonej wartości,
- stosuje twierdzenie Weierstrassa do wyznaczania wartości najmniejszej i największej funkcji w danym przedziale domkniętym.

*4.7. Własności funkcji ciągłych

Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich

Jeśli funkcja $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz $f(a) \neq f(b)$, to funkcja ta przyjmuje w przedziale $(a;b)$ każdą wartość liczbową p znajdującą się między liczbami $f(a)$ i $f(b)$.

Jeśli funkcja przyjmuje wartości pośrednie, to mówimy, że ma **własność Darboux** (Jean Gaston Darboux [czyt. żą gastą darbu], matematyk francuski żyjący w latach 1842–1917).



Powyższe twierdzenie można również sformułować następująco: jeśli funkcja $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz $f(a) < f(b)$, to dla każdej liczby $p \in (f(a); f(b))$ istnieje przynajmniej jeden argument $c \in (a;b)$ taki, że $f(c) = p$.

Wniosek

Jeśli funkcja $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz:

$$f(a) < 0,\ f(b) > 0 \quad \text{lub} \quad f(a) > 0,\ f(b) < 0$$

to istnieje przynajmniej jeden argument $c \in (a;b)$ taki, że $f(c) = 0$.

D **Przykład 1**

Wykaż, że wielomian $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ ma pierwiastek $c \in (0;1)$.

Wielomian w jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle 0;1\rangle$ oraz $w(0) = -1 < 0$ i $w(1) = 1 > 0$, zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich ma on pierwiastek $c \in (0;1)$.

D **Ćwiczenie 1**

Wykaż, że wielomian w ma pierwiastek należący do podanego przedziału.

a) $w(x) = -3x^4 + 6x^2 + 5,\ \ (0;2)$ b) $w(x) = x^5 - 6x^3 + x^2 - 7,\ \ (-2;-1)$

Ćwiczenie 2

Znajdź błąd w poniższym rozumowaniu.

Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła oraz $f(-1) = -1 < 0$ i $f(1) = 1 > 0$, zatem równanie $\frac{1}{x} = 0$ ma pierwiastek w przedziale $(-1;1)$.

Ćwiczenie 1

a) Wielomian w jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle 0;2\rangle$ oraz $w(0) = 5 > 0$ i $w(2) = -19 < 0$, zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich wielomian ten ma pierwiastek w przedziale $(0;2)$.

b) Wielomian w jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle -2;-1\rangle$ oraz $w(-2) = 13 > 0$ i $w(-1) = -1 < 0$, zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich wielomian ten ma pierwiastek w przedziale $(-2;-1)$.

Ćwiczenie 2

Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w każdym z przedziałów $(-\infty;0)$ oraz $(0;\infty)$, ale nie jest ciągła w przedziale $\langle -1;1\rangle$, zatem nie można na tym przedziale zastosować twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich.

D Przykład 2

Uzasadnij, że równanie $x = 4\cos x$ ma rozwiązanie należące do przedziału $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x - 4\cos x$ (wykres obok). Jest ona ciągła w przedziale $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

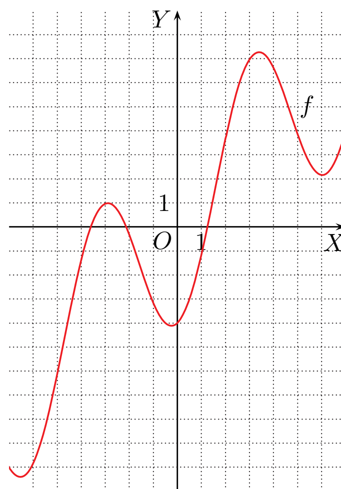
$$f(0) = 0 - 4\cos 0 = -4 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$$

Zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, co oznacza, że równanie:

$$x - 4\cos x = 0$$

ma rozwiązanie należące do tego przedziału.



D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie należące do podanego przedziału.

a) $\sin x = 3 - 2x$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

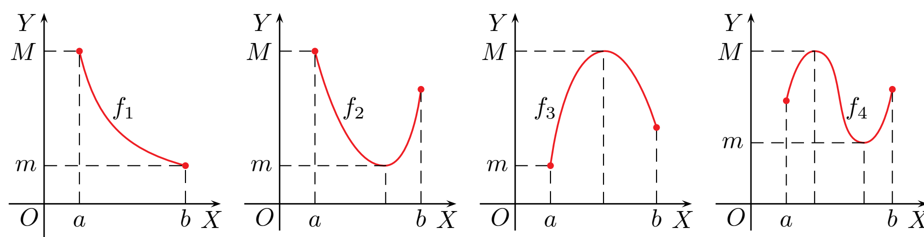
b) $\sqrt{x} + \frac{4}{x} = 4$, $(1; 2)$

Poniższe twierdzenie o przyjmowaniu przez funkcję ciągłą wartości najmniejszej i największej, zwane też **twierdzeniem o osiąganiu kresów**, udowodnił matematyk niemiecki Karl Teodor Wilhelm Weierstrass [czyt. wajersztras] (1815–1897).

Twierdzenie Weierstrassa

Jeśli funkcja $f\colon \langle a; b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła, to w pewnym punkcie tego przedziału funkcja ta przyjmuje wartość największą oraz w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość najmniejszą.

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$ przyjmuje wartość najmniejszą m oraz wartość największą M albo na końcach przedziału $\langle a; b\rangle$, albo w którymś z jego punktów wewnętrznych (patrz przykłady poniżej).



Ćwiczenie 3

a) Niech $f(x) = \sin x + 2x - 3$. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ oraz:

$$f(0) = -3 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 2 > 0$$

Zatem funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, co oznacza, że równanie:

$$\sin x = 3 - 2x$$

ma rozwiązanie należące do tego przedziału.

b) Niech $f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x} - 4$. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 1; 2\rangle$ oraz:

$$f(1) = 1 > 0$$

$$f(2) = \sqrt{2} - 2 < 0$$

Zatem funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(1; 2)$, co oznacza, że równanie:

$$\sqrt{x} + \frac{4}{x} = 4$$

ma rozwiązanie należące do tego przedziału.

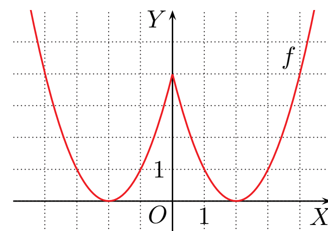
Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na to, że funkcje mogą przyjmować każdą z wartości (także najmniejszą i największą) w jednym punkcie, w wielu punktach lub nawet w nieskończenie wielu punktach.

Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = (|x| - 2)^2$. Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale:

a) $\langle -4; -3 \rangle$, b) $\langle -3; 3 \rangle$, c) $\langle -1; 5 \rangle$.



Zadania

D **1.** Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie w przedziale $(-1; 0)$.

a) $x^3 + 2x + 1 = 0$ b) $x^4 - 7x - 4 = 0$ c) $x^6 - 1 = 3x^3$

D **2.** Uzasadnij, że równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

a) $x^3 - 4x + 1 = 0$ b) $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ c) $x^4 + 2x^3 = 4$

3. Wyznacz przedział długości $\frac{1}{2}$, do którego należy rozwiązanie równania.

a) $2x^3 + 4x - 1 = 0$ b) $2x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ c) $x^4 - 3x^3 + 3 = 0$

D **4.** Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie w przedziale $(2; 4)$.

a) $\frac{2}{x^2} = \sqrt{x} - 1$ b) $\log_2 x = \frac{3}{2}x - 3$ c) $4 \sin \frac{\pi}{8}x = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x$

5. Naszkicuj wykres funkcji f. Znajdź największą wartość tej funkcji w przedziale $\langle 2; 4 \rangle$.

a) $f(x) = (x-2)^2$ b) $f(x) = -(x-3)^2+1$ c) $f(x) = (x-4)^3$

6. Naszkicuj wykres funkcji f i na tej podstawie określ, czy funkcja ta przyjmuje wartość najmniejszą.

a) $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x \in \langle -1; 0) \\ 4 - x^2 & \text{dla } x \in \langle 0; 1 \rangle \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \in (0; 1\rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (1; 4\rangle \end{cases}$

7. Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 7 & \text{dla } x \in \langle -5; -1) \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{dla } x \in \langle -1; 3 \rangle \\ -2x + 10 & \text{dla } x \in (3; 5\rangle \end{cases}$$

i podaj wartość najmniejszą m oraz wartość największą M funkcji g.

a) $g(x) = f(x-2) + 1$ b) $g(x) = |f(x)|$ c) $g(x) = f(|x|)$

D **8.** Funkcja $f\colon \left\langle \frac{1}{2}; \frac{13}{2} \right\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła i dla argumentów n będących liczbami naturalnymi $f(n) = (-2)^n$. Uzasadnij, że f ma co najmniej pięć miejsc zerowych.

Ćwiczenie 4

a) wartość najmniejsza: 1, wartość największa: 4

b) wartość najmniejsza: 0, wartość największa: 4

c) wartość najmniejsza: 0, wartość największa: 9

Odpowiedzi do zadań

2. a) Funkcja:

$$f(x) = x^3 - 4x + 1$$

jest ciągła w $\langle 0; 1 \rangle$ oraz:

$$f(0) = 1 > 0$$
$$f(1) = -2 < 0$$

Zatem funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(0; 1)$, co oznacza, że równanie $x^3 - 4x + 1 = 0$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

b) Funkcja:

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$$

jest ciągła w $\langle -1; 0 \rangle$ oraz:

$$f(-1) = -2 < 0$$
$$f(0) = 1 > 0$$

Zatem funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(-1; 0)$, co oznacza, że równanie $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

c) Niech $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4$. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$ oraz:

$$f(1) = -1 < 0$$
$$f(2) = 28 > 0$$

Zatem funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(1; 2)$, co oznacza, że równanie $x^4 + 2x^3 = 4$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

3. a) np. $(0; \frac{1}{2})$ **b)** np. $(\frac{1}{2}; 1)$ **c)** np. $(1; \frac{3}{2})$

4. a) Niech $f(x) = \frac{2}{x^2} - \sqrt{x} + 1$. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 2; 4 \rangle$ oraz:

$$f(2) = \tfrac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$$
$$f(4) = -\tfrac{7}{8} < 0$$

Zatem funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(2; 4)$, co oznacza, że równanie $\frac{2}{x^2} = \sqrt{x} - 1$ ma rozwiązanie należące do tego przedziału.

b), **c)** analogicznie jak w **a)**

5. a) $f(4) = 4$ **b)** $f(3) = 1$ **c)** $f(4) = 0$

6. a) przyjmuje, $f(-1) = f(1) = 3$
b) nie przyjmuje

7. a) $m = -3$, $M = 9$ **b)** $m = 0$, $M = 8$ **c)** $m = 0$, $M = 5$

8. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{13}{2} \right\rangle$ oraz:
$f(1) = -2 < 0$ i $f(2) = 4 > 0$, czyli funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(1; 2)$.

Analogicznie:
$f(2) = 4 > 0$ i $f(3) = -8 < 0$ – funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(2; 3)$
$f(3) = -8 < 0$ i $f(4) = 16 > 0$ – funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(3; 4)$
$f(4) = 16 > 0$ i $f(5) = -32 < 0$ – funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(4; 5)$
$f(5) = -32 < 0$ i $f(6) = 64 > 0$ – funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(5; 6)$

Zatem funkcja f ma co najmniej pięć miejsc zerowych.

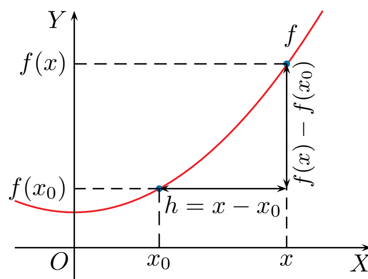
*4.8. Pochodna funkcji w punkcie

W temacie tym zakładamy, że funkcja f jest określona w pewnym przedziale $(a; b)$. Niech x_0 oraz x będą punktami należącymi do przedziału $(a; b)$.

Różnicę $h = x - x_0$ nazywamy **przyrostem argumentu** funkcji (stąd $x = x_0 + h$).

Różnicę $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazywamy **przyrostem wartości funkcji**.

Iloraz $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (dla $x \neq x_0$), zapisywany też w postaci $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0.



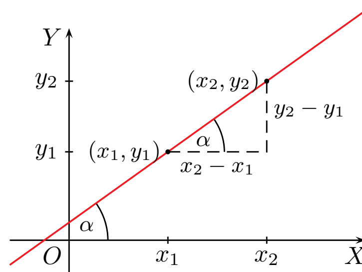
Iloraz różnicowy można interpretować jako średnią prędkość przyrostu funkcji f w przedziale $\langle x_0; x\rangle$.

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Przypomnijmy, że jeśli prosta $y = ax + b$ przechodzi przez dwa różne punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2), to jej **współczynnik kierunkowy** możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Jednocześnie iloraz $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ jest równy tangensowi kąta α (rysunek obok).



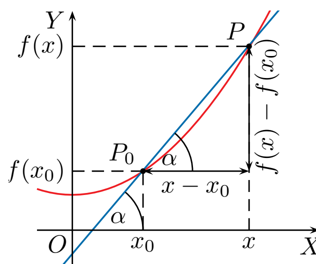
Twierdzenie

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax+b$ jest równy tangensowi kąta α, jaki ta prosta tworzy z osią OX: $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Prostą, która przecina wykres funkcji w co najmniej dwóch punktach, nazywamy **sieczną** tego wykresu.

Rozpatrzmy sieczną wykresu funkcji f przecinającą ten wykres w punktach $P_0(x_0, f(x_0))$ i $P(x, f(x))$ (rysunek obok).

Iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ jest równy tangensowi kąta α, jaki sieczna P_0P tworzy z osią OX, a zatem jest równy współczynnikowi kierunkowemu siecznej P_0P.



Uczeń:
- oblicza pochodną funkcji w punkcie, korzystając z definicji pochodnej,
- stosuje interpretację geometryczną pochodnej funkcji w punkcie do wyznaczania współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji w punkcie,
- oblicza miarę kąta, jaki styczna do wykresu funkcji w punkcie tworzy z osią OX,
- uzasadnia, że funkcja nie ma pochodnej w punkcie.

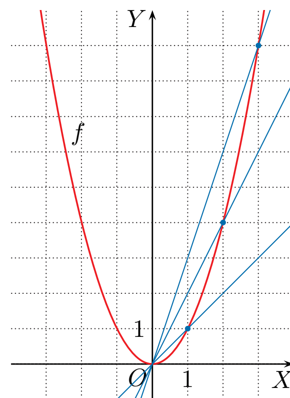
Multiteka
- Pochodna funkcji w punkcie
- Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.8

Generator testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy siecznej wykresu funkcji $f(x) = x^2$ (rysunek obok) przecinającej ten wykres w punkcie $(0,0)$ oraz w punkcie o odciętej równej: a) 1, b) 2, c) 3.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -(x-1)^2$ oraz sieczną wykresu przechodzącą przez punkty o odciętych $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$. Oblicz współczynnik kierunkowy tej siecznej.

Pochodna funkcji w punkcie

Definicja

Jeśli istnieje skończona granica $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji f w punkcie** x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Uwaga. Można wykazać, że jeśli funkcja ma w punkcie x_0 pochodną, to jest w tym punkcie ciągła. Jednak z ciągłości funkcji w punkcie x_0 nie wynika istnienie pochodnej (patrz zad. 4).

Przykład 1

a) Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 3$.

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3^2}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

b) Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 2$.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-2^3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$$

Ćwiczenie 3

Oblicz $f'(x_0)$.

a) $f(x) = 2x, \quad x_0 = 1$

b) $f(x) = 2x^2, \quad x_0 = 4$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad x_0 = -2$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3, \quad x_0 = 3$

Ćwiczenie 1

a) $P_0(0,0),\ P(1,1)$

$a = \frac{1-0}{1-0} = 1$

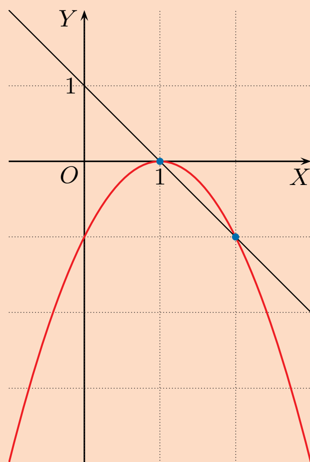
b) $P_0(0,0),\ P = (2,4)$

$a = \frac{4-0}{2-0} = 2$

c) $P_0(0,0),\ P(3,9)$

$a = \frac{9-0}{3-0} = 3$

Ćwiczenie 2



$a = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{-1-0}{2-1} = -1$

Ćwiczenie 3

a) $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$

b) $f'(4) = \lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{2x^2-32}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{2(x^2-16)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{2(x+4)(x-4)}{x-4} =$

$= \lim\limits_{x\to 4}(2x+8) = 16$

c) $f'(-2) = \lim\limits_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{\frac{1}{2}x^2-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{\frac{1}{2}(x^2-4)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x+2)} =$

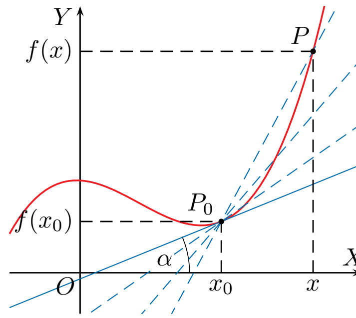
$= \lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = -2$

d) $f'(3) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{\frac{1}{3}x^3-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{\frac{1}{3}(x^3-27)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{3(x-3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{1}{3}x^2 + x + 3\right) = 9$

Interpretacja geometryczna pochodnej

Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną. Wówczas przy x dążącym do x_0 sieczne wykresu funkcji f przechodzące przez punkt P_0 (patrz rysunek) „zbliżają się” do prostej, zwanej **styczną do wykresu funkcji** w punkcie P_0.

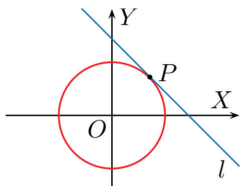


Przypomnijmy, że iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ jest równy tangensowi kąta, jaki sieczna P_0P tworzy z osią OX.

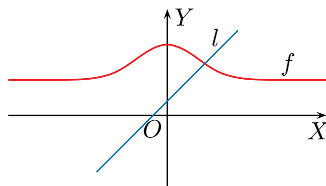
> Pochodna $f'(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta, jaki styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P_0(x_0, f(x_0))$ tworzy z osią OX (rysunek powyżej):
> $$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Liczba $f'(x_0)$ jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

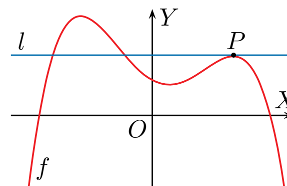
Zauważ, że o ile styczną do okręgu można zdefiniować jako prostą mającą z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny, o tyle w przypadku stycznej do wykresu funkcji takie określenie byłoby niepoprawne.



Prosta l jest styczna do okręgu w punkcie P. Prosta l ma z okręgiem jeden punkt wspólny.



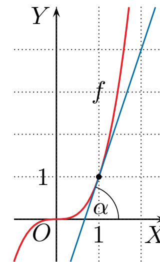
Prosta l ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f, ale nie jest jego styczną.



Prosta l jest styczną do wykresu funkcji f w punkcie P i ma trzy punkty wspólne z tym wykresem.

Przykład 2

Oblicz miarę kąta, jaki styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $(1, 1)$ tworzy z osią OX.



$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1^3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3$$

Zatem $\operatorname{tg} \alpha = 3$, stąd $\alpha \approx 72^\circ$.

Ćwiczenie 4

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Podaj miarę kąta, jaki ta styczna tworzy z osią OX.

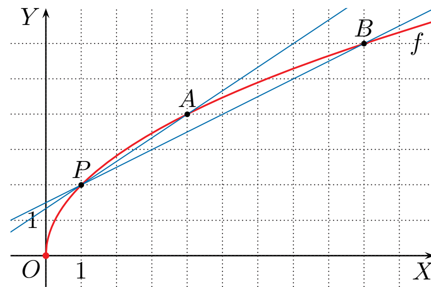
a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$ b) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$

Zadania

1. Oblicz pochodne funkcji f w punktach x_0 i x_1.

a) $f(x) = 2$, $x_0 = 3$, $x_1 = 6$
b) $f(x) = 3x - 4$, $x_0 = 1$, $x_1 = 5$
c) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 2$
e) $f(x) = x^3$, $x_0 = -2$, $x_1 = -3$
f) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 4$

2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2\sqrt{x}$.



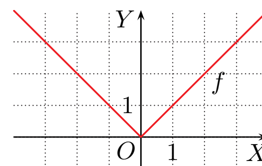
a) Oblicz współczynniki kierunkowe siecznych PA i PB oraz wyznacz ich równania.

b) Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f poprowadzonej w punkcie P.

3. Oblicz miarę kąta, jaki z osią OX tworzy styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = -\frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$ c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$

D **4.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Uzasadnij, że funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.
>
> 
>
>
> $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{x} = 1$$
>
> $$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x} = -1$$
>
> Oznacza to, że $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nie istnieje, czyli funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$ (chociaż jest ciągła w tym punkcie).

Uzasadnij, że funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0.

a) $f(x) = |x-2|$, $x_0 = 2$ b) $f(x) = x + |x|$, $x_0 = 0$

Ćwiczenie 4

a) $a = f'(1) = \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(x+1) = 2$

$\operatorname{tg}\alpha = 2$, stąd $\alpha \approx 63^\circ$

b) $a = f'(-1) = \lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}(x^2-x+1) = 3$

$\operatorname{tg}\alpha = 3$, stąd $\alpha \approx 72^\circ$

c) $a = f'(2) = \lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\frac{2-x}{2x(x-2)} = \lim\limits_{x\to2}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$, stąd $\alpha \approx 166^\circ$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$
b) $f'(x_0) = f'(x_1) = 3$
c) $f'(x_0) = 2$, $f'(x_1) = -2$
d) $f'(x_0) = -1$, $f'(x_1) = -\frac{1}{4}$
e) $f'(x_0) = 12$, $f'(x_1) = 27$
f) $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, $f'(x_1) = \frac{1}{4}$

2. a) PA: $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, PB: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

b) $a = f'(1) = \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right) = 1$

3. a) $a = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(-\frac{1}{2}\right)}{x+\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right) = -1$

$\operatorname{tg}\alpha = -1$, stąd $\alpha = 135^\circ$

b) $a = f'(1) = \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1$

$\operatorname{tg}\alpha = -1$, stąd $\alpha = 135^\circ$

c) $a = f'\left(\frac{1}{4}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{x-\frac{1}{4}} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{4}} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^{-1} = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = 1$, stąd $\alpha = 45^\circ$

4. a) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{x-2}{x-2} = 1$

$\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

Zatem $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ nie istnieje, czyli funkcja $f(x) = |x-2|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+|x|-0}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x}{x} = 2$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{x+|x|-0}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{0}{x} = 0$

Zatem $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nie istnieje, czyli funkcja $f(x) = x + |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.

*4.9. Funkcja pochodna

D **Przykład 1**

Wykaż, że funkcja $f(x) = x^2$ ma pochodną w dowolnym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$.

Obliczamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Zauważmy, że możemy określić funkcję, która każdej liczbie $x_0 \in \mathbf{R}$ będzie przyporządkowywać wartość pochodnej funkcji f w punkcie x_0 równą $2x_0$. Mamy więc dwie funkcje – funkcję $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, daną wzorem $f(x) = x^2$, oraz funkcję $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, daną wzorem $f'(x) = 2x$.

Definicja

Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie x pewnego zbioru (będącego przedziałem otwartym lub sumą przedziałów otwartych), to w tym zbiorze określona jest funkcja $y = f'(x)$, zwana **funkcją pochodną** funkcji f lub krótko **pochodną** funkcji f.
O funkcji f mówimy, że jest w tym zbiorze **różniczkowalna**.

D **Ćwiczenie 1**

Wykaż, że:

a) funkcja stała $f(x) = c$ ma w każdym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$ pochodną równą 0,

b) funkcja $f(x) = x$ ma w każdym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$ pochodną równą 1.

Wzory na pochodne zwykle zapisywane są krótko:

$(c)' = 0$, gdzie c – stała	$(x^2)' = 2x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$
$(x)' = 1$	$(x^3)' = 3x^2$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dla $x > 0$

Uwaga. Wzory $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ są szczególnymi przypadkami wzoru podanego niżej.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$: $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $x \in \mathbf{R}$.
Dla dowolnej liczby całkowitej $n < 0$: $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Uczeń:
- korzysta ze wzorów do wyznaczania funkcji pochodnej oraz wartości pochodnej w punkcie,
- wyznacza równanie stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie,
- wyznacza współrzędne punktu wykresu funkcji, w którym styczna do niego spełnia podane warunki,
- na podstawie definicji pochodnej wyprowadza wzory na pochodne funkcji.

Ćwiczenie 1

a) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$

b) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$

Multiteka
- Wykres funkcji i jej pochodnej

Przykład 2

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 7$.

$f'(x) = 2x$, zatem $f'(7) = 2 \cdot 7 = 14$.

Ćwiczenie 2

Oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0.

a) $f(x) = x^3,\ x_0 = -5$ b) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1\frac{9}{16}$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie $f'(x) = 2$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Podany obok wzór na pochodną funkcji $f(x) = x^a$, zwanej **funkcją potęgową**, jest prawdziwy dla dowolnego wykładnika $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ i $x > 0$. Na przykład dla funkcji $f(x) = \sqrt[6]{x}$:

$$f'(x) = (\sqrt[6]{x})' = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

Ćwiczenie 2

a) $f'(x) = 3x^2$, $f'(-5) = 75$

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'\left(\frac{25}{16}\right) = \frac{2}{5}$

Ćwiczenie 3

a) $f'(x) = 2x$

$2x = 2$, czyli $x = 1$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2$, czyli $x = \frac{1}{16}$

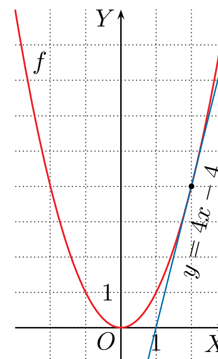
c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$-\frac{1}{x^2} = 2$ – równanie sprzeczne

Równanie stycznej

Przykład 3

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $(2, 4)$.



Równanie stycznej zapisujemy w postaci $y = ax + b$ i obliczamy jej współczynnik kierunkowy a:

$$f'(x) = 2x, \quad \text{zatem} \quad a = f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

Styczna ma więc równanie $y = 4x + b$. Aby wyznaczyć wartość b, podstawiamy współrzędne punktu $(2, 4)$ do równania stycznej: $4 = 4 \cdot 2 + b$ i stąd $b = -4$. Otrzymaliśmy równanie stycznej $y = 4x - 4$.

Prosta o współczynniku kierunkowym a przechodząca przez punkt $(x_0, f(x_0))$ dana jest równaniem $y - f(x_0) = a(x - x_0)$. Aby wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, możemy skorzystać z poniższego wzoru.

Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną, to **styczną** do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest prosta o równaniu:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.

a) $f(x) = x^2$, $P(3, 9)$ b) $f(x) = x^2$, $P(-2, 4)$ c) $f(x) = x^3$, $P(1, 1)$

Zadania

1. Na podstawie definicji pochodnej wyprowadź wzór.

a) $(x^3)' = 3x^2$ b) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ c) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = -4$ b) $f(x) = x^3$, $x_0 = -3$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ tworzącej z osią OX kąt 30°.
>
> $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc szukamy punktu x_0, dla którego $f'(x_0) = 2x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Stąd $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ oraz $y_0 = f(x_0) = \frac{1}{12}$. Zatem styczna ma równanie $y - \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{6})$, czyli $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{12}$.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ tworzącej z osią OX kąt: a) 45°, b) 60°, c) 150°.

4. Wyznacz punkt $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f jest równoległa do prostej $y = 6x - 11$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

5. Wyznacz punkt $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f jest prostopadła do prostej $y = -3x + 7$.

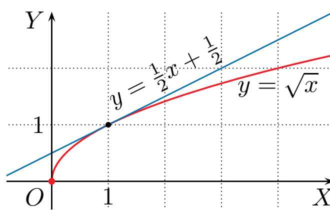
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

6. Czy istnieje styczna do wykresu funkcji f mająca współczynnik kierunkowy równy a? Jeżeli styczna istnieje, to wyznacz jej równanie.

a) $f(x) = x^3$, $a = 3$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -4$ c) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = -1$

D **7.** a) Wykaż, że prosta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 1$.

b) Korzystając z przybliżenia $\sqrt{x} \approx \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, oblicz $\sqrt{1{,}2}$ i $\sqrt{0{,}9}$. Porównaj otrzymane wyniki z wynikami uzyskanymi na kalkulatorze.



7. a) Funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ ma w punkcie $x_0 = 1$ pochodną $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
Zatem styczną do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0)) = (1, 1)$ jest prosta o równaniu:

$y - 1 = f'(1)(x - 1)$

$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b) $\sqrt{1{,}2} \approx \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 + \frac{1}{2} = 1{,}1$, kalkulator: $\sqrt{1{,}2} \approx 1{,}0954451$

$\sqrt{0{,}9} \approx \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{2} = 0{,}95$, kalkulator: $\sqrt{0{,}9} \approx 0{,}948683$

Ćwiczenie 4

a) $f'(x) = 2x$

$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$

$y = 6x - 9$

b) $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$

$y = -4x - 4$

c) $f'(x) = 3x^2$

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y = 3x - 2$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) = x^3$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2$

Zatem $(x^3)' = 3x^2$.

2. a) $y = -8x - 16$

b) $y = 27x + 54$

c) $y = -4x + 4$

3. a) $y = x - \frac{1}{4}$

b) $y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}$

c) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{12}$

4. Współczynnik kierunkowy stycznej: $a = 6$ oraz $a = f'(x_0)$, czyli $f'(x_0) = 6$.

a) $(3, 9)$

b) $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

c) $(\frac{1}{144}, \frac{1}{12})$

5. Współczynnik kierunkowy stycznej: $a = \frac{1}{3}$, stąd $f'(x_0) = \frac{1}{3}$.

a) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{36})$

b) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{27})$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27})$

c) $(\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$

6. a) tak, $y = 3x - 2$, $y = 3x + 2$

b) tak, $y = -4x + 4$, $y = -4x - 4$

c) nie

Uczeń:
- stosuje twierdzenia o pochodnej: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji do wyznaczania funkcji pochodnej oraz wartości pochodnej w punkcie,
- stosuje pochodne w zadaniach dotyczących stycznej do wykresu funkcji,
- wyznacza pochodne funkcji trygonometrycznych,
- wyprowadza wzory na pochodną: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji.

Ćwiczenie 1

a) $f'(x) = 36x^2$
b) $f'(x) = 3x^5$
c) $f'(x) = 28x^6$
d) $f'(x) = -6x^{-2}$, $x \neq 0$
e) $f'(x) = -12x^{-7}$, $x \neq 0$
f) $f'(x) = \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{4}}$, $x > 0$

Ćwiczenie 2

a) $f'(x) = 8x^3 - 6x$
b) $f'(x) = x^4 + 12x^3 - 14x$
c) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 12x^2$, $x > 0$
d) $f'(x) = 3x^5 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.10

Generator testów i sprawdzianów

*4.10. Działania na pochodnych

Twierdzenie

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x oraz c jest dowolną stałą, to:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Przykład 1

a) $(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$ b) $(5x^{-4})' = 5(x^{-4})' = 5(-4x^{-5}) = -\frac{20}{x^5}$

Ćwiczenie 1

Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = 12x^3$ c) $f(x) = 4x^7$ e) $f(x) = 2x^{-6}$
b) $f(x) = 0{,}5x^6$ d) $f(x) = 6x^{-1}$ f) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{x}$

Pochodna sumy i pochodna różnicy funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x, to:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{oraz} \quad (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Przykład 2

a) $(x^2 + 3x - 1)' = (x^2)' + 3(x)' - (1)' = 2x + 3$

b) $(2x^3 + \frac{4}{x} - x + 1)' = 2(x^3)' + 4\left(\frac{1}{x}\right)' - (x)' + (1)' = 6x^2 - \frac{4}{x^2} - 1$ dla $x \neq 0$

Ćwiczenie 2

Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6$ c) $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x^3 + 3$
b) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 3x^4 - 7x^2 - 2$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2x} - 2\sqrt{x}$

Pochodna iloczynu funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x, to:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Przykład 3

a) $(x^2\sqrt{x})' = (x^2)'\sqrt{x} + x^2(\sqrt{x})' = 2x\sqrt{x} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$
dla $x > 0$

b) $((x^2 + 1)(x^3 - 4))' = 2x(x^3 - 4) + (x^2 + 1)3x^2 = 5x^4 + 3x^2 - 8x$

Ćwiczenie 3

Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = 2x\sqrt{x} - 4x^3 + 2$

b) $f(x) = -4x^6\sqrt{x} + 6x^2$

c) $f(x) = (2x^3 - 4)(x^4 + x)$

d) $f(x) = (x^3 + x^2 - 4)(4x^4 - x^2)$

e) $f(x) = \sqrt{x}(3x^5 - x^2)$

f) $f(x) = \sqrt{x}(x^4 + 4\sqrt{x})$

Pochodna ilorazu funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x oraz $g(x) \neq 0$, to:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Przykład 4

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \text{ dla } x \neq 1$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$ b) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$ c) $f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x}}$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że jeśli funkcja g ma pochodną w punkcie x i $g(x) \neq 0$, to prawdziwy jest wzór podany obok.

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ćwiczenie 6

Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ b) $f(x) = \frac{1}{4x^2+3}$ c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}-4}$

Zadania

1. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz $f'(0)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = -3x^2 + x + 4$

b) $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

c) $f(x) = 2x^3 + 4x - 6$

d) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 6x$

e) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

f) $f(x) = -0{,}2x^5 + 0{,}5x^4 - 3x$

2. Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$

c) $f(x) = (1 - 3x^2)(x^2 + x)$

d) $f(x) = (x^3 - 1)(2x^2 - 5)$

e) $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$

f) $f(x) = (x - 2)^2(1 - x^2)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f'(x) = -6x + 1,\ f'(0) = 1,\ f'(1) = -5$
b) $f'(x) = 8x - 5,\ f'(0) = -5,\ f'(1) = 3$
c) $f'(x) = 6x^2 + 4,\ f'(0) = 4,\ f'(1) = 10$
d) $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 6,\ f'(0) = 6,\ f'(1) = 11$
e) $f'(x) = -x^3 + x^2 - x,\ f'(0) = 0,\ f'(1) = -1$
f) $f'(x) = -x^4 + 2x^3 - 3,\ f'(0) = -3,\ f'(1) = -2$

2. a) $f'(x) = 4x + 5$ **b)** $f'(x) = 4x^3 + 2x$
c) $f'(x) = -12x^3 - 9x^2 + 2x + 1$
d) $f'(x) = 10x^4 - 15x^2 - 4x$
e) $f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x - 1$
f) $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x - 4$

Ćwiczenie 3

a) $f'(x) = 2\sqrt{x} + 2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + -12x^2 = 3\sqrt{x} - 12x^2, x > 0$

b) $f'(x) = -24x^5\sqrt{x} - 4x^6\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + +12x = -26x^5\sqrt{x} + 12x, x > 0$

c) $f'(x) = 6x^2(x^4 + x) + +(2x^3 - 4)(4x^3 + 1) = = 14x^6 - 8x^3 - 4$
lub: $f(x) = 2x^7 - 2x^4 - 4x$, czyli $f'(x) = 14x^6 - 8x^3 - 4$

d) $f'(x) = (3x^2 + 2x)\cdot \cdot(4x^4 - x^2) + (x^3 + x^2 - 4)\cdot \cdot(16x^3 - 2x) = 28x^6 + 24x^5 + -5x^4 - 68x^3 + 8x$
lub: $f(x) = 4x^7 + 4x^6 - x^5 + -17x^4 + 4x^2$, czyli $f'(x) = = 28x^6 + 24x^5 - 5x^4 - 68x^3 + 8x$

e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(3x^5 - x^2\right) + +\sqrt{x}\left(15x^4 - 2x\right) = = 16{,}5x^4\sqrt{x} - 2{,}5x\sqrt{x},\ x > 0$

f) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^4 + 4\sqrt{x}\right) + +\sqrt{x}\left(4x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = = 4{,}5x^3\sqrt{x} + 4,\ x > 0$

Ćwiczenie 4

a) $f'(x) = \frac{2x(x^2+2)-x^2\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = = \frac{4x}{(x^2+2)^2}$

b) $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x+2}$,
czyli $f'(x) = \frac{(x+2)-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$

c) $f'(x) = \frac{1-\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2},\ x \in (0;1) \cup (1;\infty)$

Ćwiczenie 5

Niech $f(x) = 1$. Wówczas $f'(x) = 0$ oraz:
$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{0\cdot g(x)-1\cdot g'(x)}{(g(x))^2} = = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$

Ćwiczenie 6

a) $f'(x) = \frac{-4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5},\ x \neq 0$

b) $f'(x) = -\frac{8x}{(4x^2+3)^2}$

c) $f'(x) = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x}-4)^2} = = -\frac{1}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2}$,
$x \in (0;4) \cup (4;\infty)$

3. Określ dziedzinę funkcji f, a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej.

a) $f(x)=\frac{4x+1}{2x+1}$ e) $f(x)=\frac{6x+2}{1-x^2}$ i) $f(x)=\frac{(x-2)^2}{1-x}$

b) $f(x)=\frac{x^2}{1-2x}$ f) $f(x)=\frac{2x^2-x+1}{3x-x^2}$ j) $f(x)=\frac{1}{5x-1}+\frac{1}{x}$

c) $f(x)=\frac{5x-1}{x^2}$ g) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$ k) $f(x)=\frac{1}{1-x^4}-\frac{2}{x^3}$

d) $f(x)=\frac{x^2+1}{3x-1}$ h) $f(x)=\frac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$ l) $f(x)=\frac{3}{x^3-2}-\frac{1}{4x^4}$

4. Określ dziedzinę funkcji f, a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej. Oblicz $f'(1)$ i $f'(4)$.

a) $f(x)=\sqrt{x}\,(1-2x^2)$ c) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ e) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-4\sqrt[4]{x}$

b) $f(x)=(\sqrt{x}+1)(x-5)$ d) $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$ f) $f(x)=\sqrt{x}(x+\sqrt[4]{x})$

D **5.** Przeczytaj podany w ramce dowód wzoru na pochodną sumy funkcji.

Dowód

Wyznaczamy pochodną sumy funkcji f i g w punkcie x_0.

$$(f(x_0)+g(x_0))'=\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)]+[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Udowodnij wzór na pochodną różnicy funkcji.

D **6.** Przeczytaj podany w ramce dowód wzoru na pochodną iloczynu funkcji.

Dowód

Wyznaczamy pochodną iloczynu funkcji f i g w punkcie x_0.

$$(f(x_0)\cdot g(x_0))'=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Udowodnij wzór na pochodną ilorazu funkcji.

---

3. a) $f'(x)=\frac{2}{(2x+1)^2}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$

b) $f'(x)=\frac{-2x^2+2x}{(1-2x)^2}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$

c) $f'(x)=\frac{-5x+2}{x^3}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{0\}$

d) $f'(x)=\frac{3x^2-2x-3}{(3x-1)^2}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$

e) $f'(x)=\frac{6x^2+4x+6}{(1-x^2)^2}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$

f) $f'(x)=\frac{5x^2+2x-3}{(3x-x^2)^2}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{0,3\}$

g) $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$

h) $f'(x)=2x$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$

i) $f'(x)=\frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{1\}$

j) $f'(x)=-\frac{5}{(5x-1)^2}-\frac{1}{x^2}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{0,\frac{1}{5}\}$

k) $f'(x)=\frac{4x^3}{(1-x^4)^2}+\frac{6}{x^4}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$

l) $f'(x)=-\frac{9x^2}{(x^3-2)^2}+\frac{1}{x^5}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\setminus\{0,\sqrt[3]{2}\}$

4. a) $f'(x)=\frac{1-10x^2}{2\sqrt{x}}$, $D_f=\langle 0;\infty)$, $D_{f'}=\mathbf{R}_+$, $f'(1)=-\frac{9}{2}$, $f'(4)=-\frac{159}{4}$

b) $f'(x)=\frac{3x+2\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}}$, $D_f=\langle 0;\infty)$, $D_{f'}=\mathbf{R}_+$, $f'(1)=0$, $f'(4)=\frac{11}{4}$

c) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$, $D_f=\langle 0;\infty)$, $D_{f'}=\mathbf{R}_+$, $f'(1)=\frac{1}{8}$, $f'(4)=\frac{1}{36}$

d) $f'(x)=\frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}_+$, $f'(1)=\frac{7}{2}$, $f'(4)=\frac{13}{4}$

e) $f'(x)=-x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{4}}$, $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}_+$, $f'(1)=-2$, $f'(4)=-\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}$

f) $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$, $D_f=\langle 0;\infty)$, $D_{f'}=\mathbf{R}_+$, $f'(1)=\frac{9}{4}$, $f'(4)=3+\frac{3}{8}\sqrt{2}$

5. $(f(x_0)-g(x_0))'=\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-g(x)]-[f(x_0)-g(x_0)]}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)]-[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}=$
$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)-g'(x_0)$

6. Niech funkcje f i g mają pochodne w punkcie x_0 oraz $g(x_0)\neq 0$.

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)'=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}=$$
$$=\frac{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x_0)\lim_{x\to x_0}g(x)}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

7. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x)=\frac{x^2-4x+1}{x^2},\ \ x_0=1$

b) $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x+3},\ \ x_0=-2$

c) $f(x)=\frac{3x^2-1}{1-x^2},\ \ x_0=2$

d) $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-9},\ \ x_0=4$

8. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x)=x^2-3x+1,\ \ x_0=2$

b) $f(x)=\frac{3x}{x-2},\ \ x_0=1$

c) $f(x)=\frac{x^3+2}{x^3},\ \ x_0=1$

d) $f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x-1},\ \ x_0=-1$

e) $f(x)=x\sqrt{x}+4,\ \ x_0=4$

f) $f(x)=\frac{x^2+1}{x+2},\ \ x_0=-3$

g) $f(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{x^2+1},\ \ x_0=-1$

h) $f(x)=\frac{x^2+4}{(x+2)^2},\ \ x_0=2$

9. Czy istnieje prosta o współczynniku kierunkowym równym a styczna do wykresu funkcji f?

a) $a=0,\ \ f(x)=(x^3+1)(4-x)$

b) $a=-1,\ \ f(x)=\frac{2x+1}{4x-1}$

c) $a=2,\ \ f(x)=\sqrt{x}+x$

d) $a=0,\ \ f(x)=\frac{5x}{x^2+1}$

10. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji f równoległych do prostej $y=-2x+3$.

a) $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$

b) $f(x)=2x+\frac{1}{x}$

Twierdzenie

Każda z funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens i cotangens ma pochodną we wszystkich punktach swojej dziedziny.

$(\sin x)'=\cos x,\ x\in\mathbf{R}$

$(\cos x)'=-\sin x,\ x\in\mathbf{R}$

$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ x\in\mathbf{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\colon k\in\mathbf{Z}\}$

$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\ x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi\colon k\in\mathbf{Z}\}$

11. Oblicz $f'(\frac{\pi}{3})$ i $f'(\frac{\pi}{4})$.

a) $f(x)=\sin x$ b) $f(x)=\cos x$ c) $f(x)=\operatorname{tg} x$ d) $f(x)=\operatorname{ctg} x$

12. Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x)=\sin x\cos x$

b) $f(x)=(2x+1)\sin x$

c) $f(x)=(x^2+3)\operatorname{tg} x$

d) $f(x)=\sin^2 x$

e) $f(x)=x\operatorname{ctg} x$

f) $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$

g) $f(x)=\cos^2 x$

h) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

i) $f(x)=\frac{1-\sin x}{\cos x}$

7. **a)** 2 **b)** 2 **c)** $\frac{8}{9}$ **d)** $-\frac{5}{7}$

8. **a)** $y=x-3$
b) $y=-6x+3$
c) $y=-6x+9$
d) $y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$
e) $y=3x$
f) $y=-4x-22$
g) $y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$
h) $y=\frac{1}{2}$

9. **a)**, **b)**, **c)**, **d)** tak

10. **a)** $y=-2x-5,\ y=-2x+3$
b) $y=-2x-4,\ y=-2x+4$

11. **a)** $f'(x)=\cos x$, $f'(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2},\ f'(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $f'(x)=-\sin x$, $f'(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ f'(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $f'(\frac{\pi}{3})=4,\ f'(\frac{\pi}{4})=2$
d) $f'(x)=-\frac{1}{\sin x}$, $f'(\frac{\pi}{3})=-1\frac{1}{3},\ f'(\frac{\pi}{4})=-2$

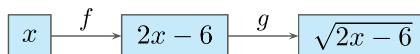
12. **a)** $f'(x)=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1$
b) $f'(x)=2\sin x+(2x+1)\cos x$
c) $f'(x)=2x\operatorname{tg} x+\frac{x^2+3}{\cos^2 x}$
d) $f(x)=\sin x\cdot\sin x$
$f'(x)=\cos x\cdot\sin x+\sin x\cdot\cos x=2\sin x\cos x$
e) $f'(x)=\operatorname{ctg} x-\frac{x}{\sin^2 x}$
f) $f'(x)=\frac{\cos x\cdot x^2-\sin x\cdot 2x}{x^4}=\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$
g) $f(x)=\cos x\cdot\cos x$
$f'(x)=-\sin x\cdot\cos x+\cos x\cdot(-\sin x)=-2\sin x\cos x$
h) $f'(x)=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$
i) $f'(x)=\frac{-\cos x\cdot\cos x-(1-\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{-\cos^2 x+\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x-1}{\cos^2 x}$

Uczeń:

- wyznacza wzór funkcji złożonej oraz jej dziedzinę,
- wyznacza pochodną funkcji złożonej,
- stosuje pochodną funkcji złożonej w zadaniach dotyczących stycznej,
- wyznacza pochodną funkcji będącej złożeniem funkcji trygonometrycznych i wielomianów.

*4.11. Pochodna funkcji złożonej

Aby obliczyć wartość funkcji $h(x) = \sqrt{2x-6}$ dla argumentu $x \in \langle 3; \infty)$, wykonujemy kolejno operacje: najpierw mnożymy ten argument przez 2 i odejmujemy 6, a następnie obliczamy pierwiastek kwadratowy z otrzymanej liczby. Funkcja h jest **złożeniem** dwóch funkcji: $f(x) = 2x - 6$ oraz $g(x) = \sqrt{x}$.



Na przykład dla $x = 5$: $5 \xrightarrow{f} 2 \cdot 5 - 6 \xrightarrow{g} \sqrt{4}$, zatem $h(5) = 2$.

Definicja

Jeśli $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to T$, to funkcję $h\colon X \to T$ określoną wzorem $h(x) = g(f(x))$ nazywamy **złożeniem** funkcji f i g.

Funkcję f nazywamy **funkcją wewnętrzną**, funkcję g – **funkcją zewnętrzną**.

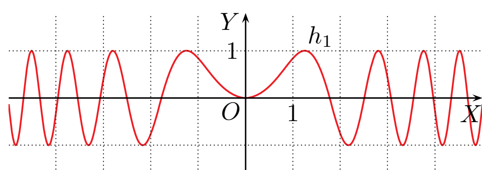
Złożenie funkcji f i g można również zapisać: $(g \circ f)(x)$.

Uwaga. Składanie funkcji nie jest operacją przemienną – funkcje $f \circ g$ oraz $g \circ f$ nie muszą być równe.

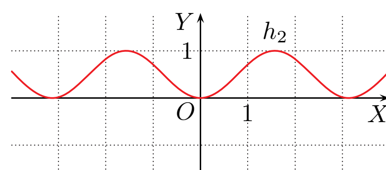
Przykład 1

Niech $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. Poniżej przedstawiono wykresy funkcji złożonych:

$h_1(x) = g(f(x)) = \sin x^2$



$h_2(x) = f(g(x)) = \sin^2 x$



Przykład 2

Podaj dziedzinę i wzór funkcji złożonej h, jeśli f jest funkcją wewnętrzną, a g – funkcją zewnętrzną.

a) $f(x) = x - 2$, $g(x) = \sqrt{x}$

$D_h = \langle 2; \infty)$, $h(x) = g(f(x)) = g(x-2) = \sqrt{x-2}$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$

$D_h = \langle 0; \infty)$, $h(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 2$.

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.11

Generator testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 1

Podaj wzór funkcji $h(x) = g(f(x))$. Określ dziedzinę funkcji h.

a) $f(x) = x^2 + 4,\ \ g(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 - 1,\ \ g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x},\ \ g(x) = 2x - 4$

d) $f(x) = \sqrt{x},\ \ g(x) = \frac{1}{x}$

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, a funkcja g ma pochodną w punkcie $f(x_0)$, to funkcja $h = g \circ f$ ma pochodną w punkcie x_0 oraz:

$$h'(x_0) = (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Przykład 3

a) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = (2x + 1)^3$.

Funkcja h jest złożeniem funkcji $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^3$, zatem:

$$h'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot (2x+1)' = 3(2x+1)^2 \cdot 2 =$$
$$= 6(4x^2 + 4x + 1) = 24x^2 + 24x + 6$$

Pochodną funkcji h można również wyznaczyć, korzystając z tego, że:

$$(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

b) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = (3x^2 + 1)^5$.

Funkcja h jest złożeniem funkcji $f(x) = 3x^2 + 1$ i $g(x) = x^5$, zatem:

$$h'(x) = 5(3x^2+1)^4 \cdot (3x^2+1)' = 5(3x^2+1)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2+1)^4$$

Ćwiczenie 2

Wyznacz pochodną funkcji h.

a) $h(x) = (2x^2 - 1)^3$

b) $h(x) = (x^2 - 3x)^4$

c) $h(x) = (3x^2 + x)^5$

d) $h(x) = (4x + 6)^6$

Przykład 4

a) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Funkcja h jest złożeniem funkcji $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = \sqrt{x}$, zatem:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

b) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2}$.

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4+2x^2}} \cdot (x^4 + 2x^2)' = \frac{4x^3+4x}{2\sqrt{x^4+2x^2}} = \frac{2x(x^2+1)}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x(x^2+1)}{|x|\sqrt{x^2+2}}$$

Zauważ, że dziedziną funkcji h jest $\mathbf{R}$, a dziedziną funkcji h' – $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Ćwiczenie 1

a) $h(x) = \sqrt{x^2+4},\ D_h = \mathbf{R}$

b) $h(x) = \sqrt{x^2-1}$,
$D_h = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$

c) $h(x) = 2\sqrt{x} - 4,\ D_h = \langle 0; \infty)$

d) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ D_h = \mathbf{R}_+$

Ćwiczenie 2

a) $h'(x) = 3(2x^2-1)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2-1)^2$

b) $h'(x) = 4(x^2-3x)^3 \cdot (2x-3) = 4(2x-3)(x^2-3x)^3$

c) $h'(x) = 5(3x^2+x)^4 \cdot (6x+1) = 5(6x+1)(3x^2+x)^4$

d) $h'(x) = 6(4x+6)^5 \cdot 4 = 24(4x+6)^5$

Ćwiczenie 3

Wyznacz pochodną funkcji h. Określ dziedziny funkcji h i h'.

a) $h(x) = \sqrt{4x^2+1}$ c) $h(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$

b) $h(x) = \sqrt{3x^2+x}$ d) $h(x) = \sqrt{4+\sqrt{x}}$

Zadania

1. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz $f'(0)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = (x+1)^3$ c) $f(x) = (1-x)^5$ e) $f(x) = (3x+2)^5$

b) $f(x) = (1+x^2)^4$ d) $f(x) = (4x^2+2)^3$ f) $f(x) = (5x^4-6x+2)^6$

2. Wyznacz pochodną funkcji f. Określ dziedziny funkcji f i f'.

a) $f(x) = \sqrt{2x-4}$ c) $f(x) = \sqrt{x^3+2x}$ e) $f(x) = \sqrt{4x^2+x}$

b) $f(x) = \sqrt{6x^2+1}$ d) $f(x) = \sqrt{3x^2-6x}$ f) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

3. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz $f'(0)$.

a) $f(x) = (7x-1)^3(2x+1)^2$ c) $f(x) = x^2\sqrt{4x+1}$

b) $f(x) = (x^2-1)^2(3-x)^2$ d) $f(x) = x^3\sqrt{1-4x}$

4. Wyznacz pochodną funkcji f. Oblicz $f'(1)$.

a) $f(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{3x+1}}$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

5. Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Oblicz $h'(1)$, jeżeli:

a) $h = f \circ g$, b) $h = g \circ f$.

6. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$, $x_0 = 2$ b) $f(x) = \sqrt[3]{3x+4}$, $x_0 = -1$

7. Rozwiąż równanie $f(g(x)) = g(f(x))$, jeśli $f(x) = 2x+3$ i $g(x) = \frac{1}{x}$.

8. Wyznacz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \sin 4x$ e) $f(x) = \cos x^2$ i) $f(x) = \cos^2 x$

b) $f(x) = \cos 5x$ f) $f(x) = \sin(x^3-1)$ j) $f(x) = \sin^3 x$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(6x-1)$ g) $f(x) = \cos(x^2-1)$ k) $f(x) = \operatorname{tg}(1-x^3)$

d) $f(x) = \sin x^2$ h) $f(x) = \sin^2 x$ l) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

Ćwiczenie 3

a) $h'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$,
$D_h = D_{h'} = \mathbf{R}$

b) $h'(x) = \frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x}}$,
$D_h = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 0;\infty)$,
$D_{h'} = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (0;\infty)$

c) $h'(x) = -\frac{1}{2|x|\sqrt{x^2+x}}$,
$D_h = (-\infty;-1\rangle \cup (0;\infty)$,
$D_{h'} = (-\infty;-1) \cup (0;\infty)$

d) $h'(x) = \frac{1}{4\sqrt{4x+x\sqrt{x}}}$,
$D_h = \langle 0;\infty)$, $D_{h'} = (0;\infty)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f'(x) = 3(x+1)^2$,
$f'(0) = 3$, $f'(1) = 12$
b) $f'(x) = 8x(x^2+1)^3$,
$f'(0) = 0$, $f'(1) = 64$
c) $f'(x) = -5(x-1)^4$,
$f'(0) = -5$, $f'(1) = 0$
d) $f'(x) = 24x(4x^2+2)^2$,
$f'(0) = 0$, $f'(1) = 864$
e) $f'(x) = 15(3x+2)^4$,
$f'(0) = 240$, $f'(1) = 9375$
f) $f'(x) = 12(10x^3-3)\cdot$
$\cdot(5x^4-6x+2)^5$,
$f'(0) = -1152$, $f'(1) = 84$

2. a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$,
$D_f = \langle 2;\infty)$,
$D_{f'} = (2;\infty)$
b) $f'(x) = \frac{6x}{\sqrt{6x^2+1}}$,
$D_f = D_{f'} = \mathbf{R}$
c) $f'(x) = \frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x}}$,
$D_f = \langle 0;\infty)$, $D_{f'} = (0;\infty)$
d) $f'(x) = \frac{3x-3}{\sqrt{3x^2-6x}}$,
$D_f = (-\infty;0\rangle \cup \langle 2;\infty)$,
$D_{f'} = (-\infty;0) \cup (2;\infty)$
e) $f'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}}$,
$D_f = (-\infty;-\frac{1}{4}\rangle \cup \langle 0;\infty)$,
$D_{f'} = (-\infty;-\frac{1}{4}) \cup (0;\infty)$
f) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$,
$D_f = \langle -2;2\rangle$,
$D_{f'} = (-2;2)$

5. a) $h'(1) = -3$
b) $h'(1) = -\frac{1}{3}$

6. a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$
b) $y = x+2$

7. $x = -1$

3. a) $f'(x) = (70x+17)(2x+1)(7x-1)^2$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}$, $f'(0) = 17$
b) $f'(x) = 2(x^2-1)(3-x)(-3x^2+6x+1)$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}$, $f'(0) = -6$
c) $f'(x) = \frac{10x^2+2x}{\sqrt{4x+1}}$, $D_f = \left\langle -\frac{1}{4};\infty\right)$, $D_{f'} = \left(-\frac{1}{4};\infty\right)$, $f'(0) = 0$
d) $f'(x) = \frac{3x^2-14x^3}{\sqrt{1-4x}}$, $D_f = \left(-\infty;\frac{1}{4}\right\rangle$, $D_{f'} = \left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$, $f'(0) = 0$

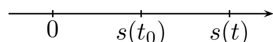
4. a) $f'(x) = \frac{-6x-7}{2(3x+1)\sqrt{3x+1}}$, $D_f = D_{f'} = \left(-\frac{1}{3};\infty\right)$, $f'(1) = -\frac{13}{16}$
b) $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. a) $f'(x) = 4\cos 4x$ **b)** $f'(x) = -5\sin 5x$
c) $f'(x) = \frac{6}{\cos^2(6x-1)}$, $D_f = D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} : k \in \mathbf{Z}\right\}$
d) $f'(x) = 2x\cos x^2$ **e)** $f'(x) = -2x\sin x^2$ **f)** $f'(x) = 3x^2\cos(x^3-1)$
g) $f'(x) = -2x\sin(x^2-1)$ **h)** $f'(x) = 2\sin x\cos x$ **i)** $f'(x) = -2\sin x\cos x$

*4.12. Interpretacja fizyczna pochodnej

Uczeń:
– stosuje pochodną do wyznaczania prędkości oraz przyspieszenia poruszających się ciał.

Przypuśćmy, że punkt materialny (lub krótko punkt) porusza się po osi liczbowej, a funkcja s opisuje jego położenie w chwili t.



Prędkość średnia punktu w przedziale od t_0 do t wyraża się za pomocą wzoru:

$$v_{śr} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

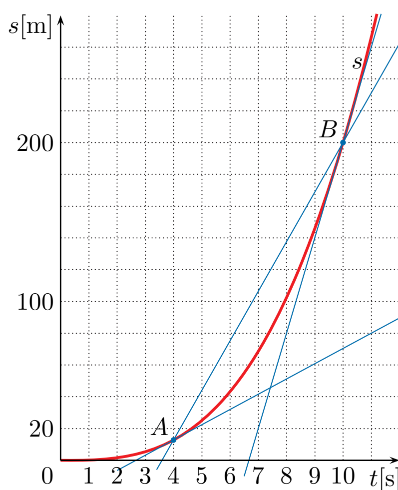
Prędkość w chwili t_0, czyli prędkość chwilową $v(t_0)$, określamy jako granicę ilorazu różnicowego przy t dążącym do t_0:

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Zatem $v(t_0) = s'(t_0)$, czyli prędkość chwilowa jest pochodną położenia względem czasu.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji s opisującej położenie punktu poruszającego się po prostej w zależności od czasu t.



• Współczynnik kierunkowy siecznej AB wykresu funkcji s jest równy prędkości średniej od chwili $t_0 = 4$ do chwili $t = 10$:

$$v_{śr} = \frac{s(10)-s(4)}{10-4}$$

• Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji s w punkcie A jest równy prędkości w chwili $t_0 = 4$:

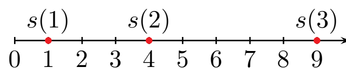
$$v(4) = \lim_{t\to 4} \frac{s(t)-s(4)}{t-4} = s'(4)$$

• Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji s w punkcie B jest równy prędkości w chwili $t = 10$:

$$v(10) = \lim_{t\to 10} \frac{s(t)-s(10)}{t-10} = s'(10)$$

Ćwiczenie 1

Położenie punktu na osi liczbowej w chwili t opisuje wzór $s(t) = t^2$. Niech $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$. Oblicz prędkość średnią od chwili t_1 do chwili t_3 oraz prędkości w chwilach t_1, t_2 i t_3.



Ćwiczenie 1

$v_{śr} = \frac{s(3)-s(1)}{3-1} = \frac{3^2-1^2}{2} = 4$

oraz:

$v(t_0) = s'(t_0) = 2t_0$

$v(t_1) = 2t_1 = 2$

$v(t_2) = 2t_2 = 4$

$v(t_3) = 2t_3 = 6$

Multiteka
• Interpretacja fizyczna pochodnej

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.12

Generator testów i sprawdzianów

Jeżeli ciało wyrzucono pionowo w górę (z poziomu ziemi) z prędkością początkową v_0, to funkcje $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ oraz $v(t) = v_0 - gt$ opisują odpowiednio wysokość h, na której znajduje się ciało w chwili t, oraz prędkość v, z którą porusza się ono w chwili t ($g \approx 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ jest przyspieszeniem ziemskim).

Przykład 2

Metalowa kula została wystrzelona pionowo w górę (z poziomu ziemi) z prędkością początkową $v_0 = 29{,}4$ m/s. Po podstawieniu wartości v_0 i g do wzoru:

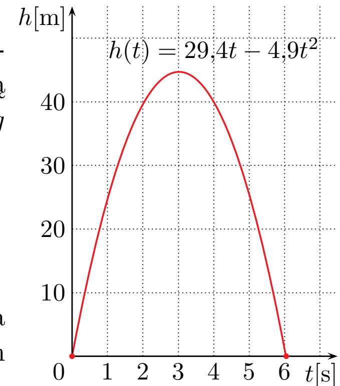
$$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

otrzymujemy funkcję:

$$h(t) = 29{,}4t - 4{,}9t^2$$

opisującą wysokość, na której znajduje się kula w chwili t. W tabeli podano wysokości, na których znajdowała się kula w kolejnych sekundach.

t[s]	0	1	2	3	4	5	6
h[m]	0	24,5	39,2	44,1	39,2	24,5	0



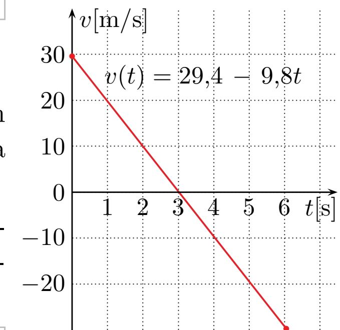
Wykres funkcji h opisującej wysokość, na której znajdowała się kula w chwili t.

Ćwiczenie 2

a) Sprawdź, czy jeśli funkcja h dana jest wzorem $h(t) = 29{,}4t - 4{,}9t^2$, to jej pochodną jest funkcja $v(t) = 29{,}4 - 9{,}8t$.

b) Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, wpisując prędkości metalowej kuli z przykładu 2. w kolejnych sekundach.

t[s]	0	1	2	3	4	5	6
v[m/s]	29,4	19,6	9,8	0	−9,8	−19,6	−29,4



Wykres funkcji v opisującej prędkość, z którą poruszała się kula w chwili t.

Pojawienie się znaku minus w obliczeniach (dla $t = 4$) świadczy o zmianie zwrotu wektora prędkości – kula najpierw poruszała się w górę, a potem w dół.

Ćwiczenie 2

a) $h'(t) = 29{,}4 - 2 \cdot 4{,}9t =$
$= 29{,}4 - 9{,}8t = v(t)$

Komentarz

Warto zwrócić uczniom uwagę na wyjaśnienie zamieszczone pod tabelą.

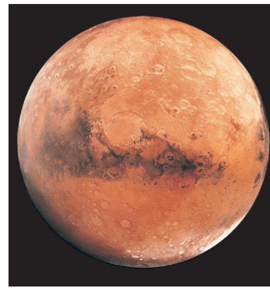
Zadania

1. Przyjmując, że drogę przebytą przez spadające swobodnie ciało opisuje funkcja $s(t) = 4{,}9 \cdot t^2$ (gdzie droga mierzona jest w metrach, a czas w sekundach), oblicz prędkości ciała w chwilach $t_1 = 1$ i $t_2 = 3$. Odpowiedź podaj w m/s i w km/h.

Odpowiedzi do zadań

1. $v(1) = 9{,}8$ m/s $= 35{,}28$ km/h,
$v(3) = 29{,}4$ m/s $= 105{,}84$ km/h

2. Na Marsie przyspieszenie grawitacyjne wynosi około 3,7 m/s^2, zatem funkcję opisującą drogę przebytą przez swobodnie spadające ciało można przedstawić w postaci $s(t) = 1{,}85t^2$, gdzie droga mierzona jest w metrach, a czas w sekundach. Oblicz prędkości w chwili $t = 4$, jakie osiągnie swobodnie spadające ciało na Ziemi oraz na Marsie. Odpowiedź podaj w km/h.



3. Ciało wyrzucone pionowo w górę z powierzchni Marsa z prędkością początkową $v_0 = 18{,}5$ m/s znajduje się w chwili t na wysokości:

$$h(t) = 18{,}5t - 1{,}85t^2$$

Oblicz prędkość, z którą poruszało się to ciało w chwili $t = 5$.

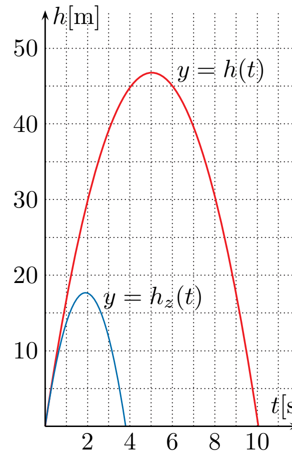
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$h(t) = 18{,}5t - 1{,}85t^2$$

oraz dla porównania wykres funkcji:

$$h_z(t) = 18{,}5t - 4{,}9t^2$$

opisującej wysokość, na jakiej znajdowałoby się w chwili t ciało wyrzucone z tą samą prędkością początkową z powierzchni Ziemi.



Czy wiesz, że...

Przypuśćmy, że punkt porusza się po osi liczbowej, a funkcja v opisuje jego prędkość w zależności od czasu t.

0 $v(t_0)$ $v(t)$

Przyspieszenie średnie w przedziale od t_0 do t wyraża się za pomocą wzoru:

$$a_{śr} = \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

Przyspieszenie $a(t_0)$ w chwili t_0 jest pochodną prędkości:

$$a(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

4. Prędkość, z którą punkt porusza się po osi liczbowej, jest wyrażona za pomocą funkcji v. Oblicz przyspieszenia w chwilach $t = 1$ oraz $t = 4$.

a) $v(t) = 4t$ b) $v(t) = t^2 - t$ c) $v(t) = t^3 - 4t^2 + t$

5. Wysokość w metrach, na jakiej znajduje się kula wystrzelona pionowo w górę, jest opisana za pomocą funkcji $h(t) = 24{,}5t - 4{,}9t^2$. Wyznacz funkcję opisującą prędkość oraz funkcję opisującą przyspieszenie tej kuli.

2. $s_z(t) = 4{,}9t^2$, $v_z(t) = 9{,}8t$, $v_z(4) = 39{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 141{,}12\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$
$s_M(t) = 1{,}85t^2$,
$v_M(t) = 3{,}7t$,
$v_M(4) = 14{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 53{,}28\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

3. $v(t) = 18{,}5 - 3{,}7t$,
$v(5) = 18{,}5 - 18{,}5 = 0$ [m/s]

4. **a)** $a(t) = v'(t) = 4$, $a(1) = a(4) = 4$
b) $a(t) = v'(t) = 2t - 1$, $a(1) = 1$, $a(4) = 7$
c) $a(t) = v'(t) = 3t^2 - 8t + 1$, $a(1) = -4$, $a(4) = 17$

5. $v(t) = h'(t) = 24{,}5 - 9{,}8t$,
$a(t) = v'(t) = -9{,}8$

Rachunek różniczkowy i całkowy

Rachunek pochodnych (zwany także rachunkiem różniczkowym) stworzono w XVII w. Wraz z powiązanym z nim rachunkiem całkowym stał się podstawą rozwoju fizyki klasycznej i astronomii. Umożliwił m.in. opis ruchu ciał (w tym planet) za pomocą równań wiążących ze sobą wielkości takie jak czas, droga, prędkość i przyspieszenie.

Za twórców rachunku różniczkowego i całkowego uważa się dwóch uczonych: Isaaca Newtona [czyt. izaaka niutona] i Gottfrieda Leibniza [czyt. gotfrida lajbnica].

Sir Isaac Newton (1643–1727)



Matematyk, fizyk i astronom angielski. Stworzył rachunek różniczkowy przy okazji prowadzonych badań – było to dla niego użyteczne narzędzie, które umożliwiło mu ścisłe sformułowanie praw fizyki dotyczących ruchu ciał oraz prawa powszechnego ciążenia. Z prac Newtona można się dowiedzieć, w jaki sposób to narzędzie wykorzystywał, nie ma w nich jednak żadnego wykładu teoretycznego na temat rachunku różniczkowego i całkowego.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)



Niemiecki filozof i matematyk. Pierwszą pracę dotyczącą rachunku różniczkowego i całkowego opublikował w 1684 r. Przedstawił w niej m.in. reguły różniczkowania iloczynu i ilorazu funkcji oraz wzór na pochodną funkcji potęgowej. Opublikowanie tej pracy przez Leibniza wywołało w Anglii ostre dyskusje. Oskarżono go o plagiat – zarzucano mu, że poznał metody Newtona podczas pobytu w Londynie w 1673 r. Spór trwał nawet po śmierci uczonych. Dziś przyjmuje się, że Newton i Leibniz dokonali tego odkrycia niezależnie.

Rachunek różniczkowy umożliwił opisywanie zjawisk zmieniających się w czasie.

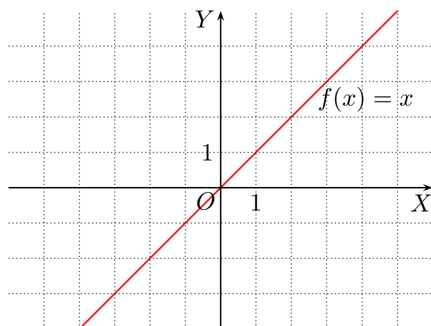
Multi*teka*

- Matematyka zmian: Newton

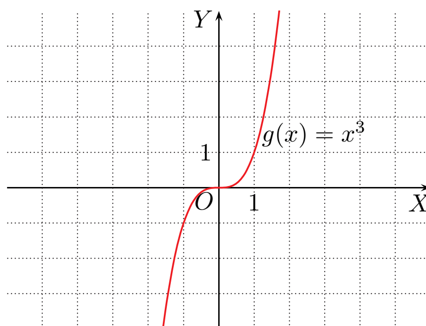
*4.13. Monotoniczność funkcji

Uczeń:
– korzysta z własności pochodnej do wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji,
– uzasadnia monotoniczność funkcji w danym zbiorze,
– wyznacza wartości parametrów tak, aby funkcja była monotoniczna, stosując twierdzenie o znaku pochodnej,
– wykorzystuje znak pochodnej do uzasadniania nierówności trygonometrycznych.

Przykład 1



Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określona za pomocą wzoru $f(x) = x$ jest rosnąca. Jej pochodną jest funkcja $f'(x) = 1$. Dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$.



Funkcja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określona za pomocą wzoru $g(x) = x^3$ jest rosnąca. Jej pochodną jest funkcja $g'(x) = 3x^2$. Dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $g'(x) \geqslant 0$.

Ogólnie prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

- Jeśli funkcja f w pewnym przedziale $(a; b)$ jest rosnąca i ma pochodną, to $f'(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in (a; b)$.
- Jeśli funkcja f w pewnym przedziale $(a; b)$ jest malejąca i ma pochodną, to $f'(x) \leqslant 0$ dla każdego $x \in (a; b)$.

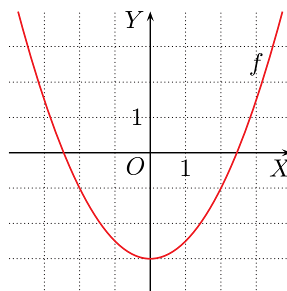
Uwaga. Przypomnijmy, że pochodna funkcji stałej w pewnym przedziale jest w tym przedziale równa 0.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ (wykres obok):

- jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$,
- jest rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty)$.

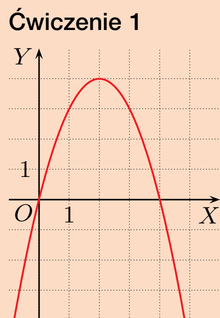
Jej pochodną jest funkcja $f'(x) = x$.
Dla $x \in (-\infty; 0\rangle$ zachodzi nierówność $f'(x) \leqslant 0$,
a dla $x \in \langle 0; \infty)$ – nierówność $f'(x) \geqslant 0$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4x$ i podaj jej przedziały monotoniczności. Określ znak pochodnej funkcji f w tych przedziałach.

Ćwiczenie 1



Funkcja f jest:
– rosnąca w przedziale $(-\infty; 2\rangle$,
– malejąca w przedziale $\langle 2; \infty)$.
$f'(x) = -2x + 4$
Dla $x \in (-\infty; 2\rangle$ zachodzi nierówność $f'(x) \geqslant 0$,
a dla $x \in \langle 2; \infty)$ zachodzi nierówność $f'(x) \leqslant 0$.

Czy na podstawie znaku pochodnej można wnioskować o monotoniczności funkcji? Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

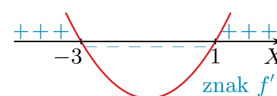
- Jeżeli pochodna funkcji f jest dodatnia w przedziale $(a; b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.
- Jeżeli pochodna funkcji f jest ujemna w przedziale $(a; b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.

Przykład 3

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.

Wyznaczamy pochodną: $f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$.

Rozwiązania nierówności $(x+3)(x-1) > 0$ i nierówności $(x+3)(x-1) < 0$ odczytujemy ze szkicu wykresu pochodnej:



$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

$f'(x) < 0$ dla $x \in (-3; 1)$

Na podstawie twierdzenia wnioskujemy, że funkcja f rośnie w przedziałach $(-\infty; -3)$ oraz $(1; \infty)$, a maleje w przedziale $(-3; 1)$.

Jeśli funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale $(a; b)$ i jest ciągła w przedziale $\langle a; b\rangle$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $\langle a; b\rangle$.

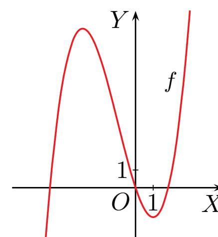
Komentarz
Warto zwrócić uwagę uczniów na to, że funkcja rosnąca w każdym z przedziałów:

$$(-\infty; -3\rangle \text{ i } \langle 1; \infty)$$

nie jest rosnąca w ich sumie:

$$(-\infty; -3\rangle \cup \langle 1; \infty)$$

Funkcja f z przykładu 3. jest wielomianem, czyli jest funkcją ciągłą, zatem jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -3\rangle$ i $\langle 1; \infty)$ oraz malejąca w przedziale $\langle -3; 1\rangle$ (wykres obok).



D **Ćwiczenie 2**

Uzasadnij, że funkcja:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -1\rangle$ i $\langle 1; \infty)$ oraz malejąca w przedziale $\langle -1; 1\rangle$,

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle 0; \infty)$.

Ćwiczenie 2

a) $f'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, $f'(x) < 0$ dla $x \in (-1; 1)$

Funkcja f jest wielomianem, czyli jest funkcją ciągłą, zatem jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -1\rangle$ i $\langle 1; \infty)$ oraz malejąca w przedziale $\langle -1; 1\rangle$.

b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

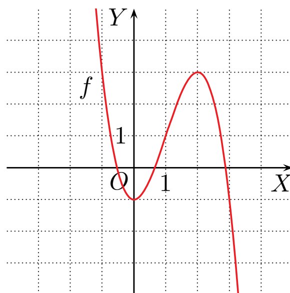
$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0)$, $f'(x) < 0$ dla $x \in (0; \infty)$

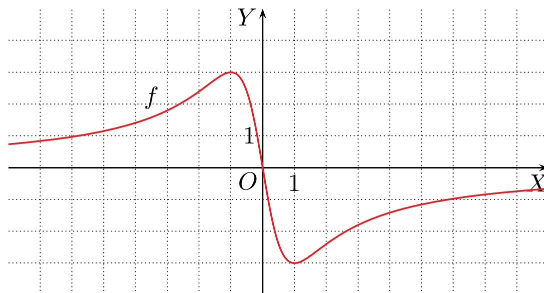
Funkcja f jest ciągła, zatem jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle 0; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu jej przedziały monotoniczności. Sprawdź odpowiedź, badając znak pochodnej.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ b) $f(x) = -\frac{6x}{x^2+1}$





Ćwiczenie 4

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = x^3 - 3x - 5$ c) $f(x) = (x^2-4)(x^2-1)$ e) $f(x) = 6x^5 + 5x^3$

b) $f(x) = x^5 - 20x + 1$ d) $f(x) = (x+3)^2(x-1)$ f) $f(x) = x^3 - 4x^2$

Ćwiczenie 5

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x+8}$ c) $f(x) = \frac{x^2-7}{x-4}$

Zadania

D **1.** Wykaż, że funkcja f jest rosnąca.

a) $f(x) = x^3 + 6x + 8$ c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ e) $f(x) = x^5 + x$

b) $f(x) = 2x^3 + 2x - 5$ d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 12x$ f) $f(x) = 3x^5 + 4x$

D **2.** Wykaż, że funkcja f jest malejąca.

a) $f(x) = -x^3 - x$ c) $f(x) = -2x^3 + x^2 - 7x$ e) $f(x) = -2x^5 - x$

b) $f(x) = -2x^3 - 15x$ d) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x$ f) $f(x) = -x^7 - 4x$

3. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x + 3$ e) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 5$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ f) $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x$

c) $f(x) = x^3 + 9x^2 - 21x - 4$ g) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 2$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x + 1$ h) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 24x$

1. a) $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest rosnąca.
b) $f'(x) = 6x^2 + 2 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest rosnąca.
c) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geqslant 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest rosnąca.
d) $f'(x) = 6x^2 + 6x + 12 > 0$ $(\Delta < 0)$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest rosnąca.
e) $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest rosnąca.
f) $f'(x) = 15x^4 + 4 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest rosnąca.

2. a) $f'(x) = -3x^2 - 1 < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest malejąca.
b) $f'(x) = -6x^2 - 15 < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest malejąca.
c) $f'(x) = -6x^2 + 2x - 7 < 0$ $(\Delta < 0)$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest malejąca.
d) $f'(x) = -3x^2 + 12x - 12 = -3(x-2)^2 \leqslant 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest malejąca.
e) $f'(x) = -10x^4 - 1 < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest malejąca.
f) $f'(x) = -7x^6 - 4 < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, więc funkcja f jest malejąca.

Ćwiczenie 3

a) maleje w $(-\infty; 0\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, rośnie w $\langle 0; 2\rangle$
b) rośnie w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$, maleje w $\langle -1; 1\rangle$

Ćwiczenie 4

a) rośnie w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$, maleje w $\langle -1; 1\rangle$
b) rośnie w $(-\infty; -\sqrt{2}\rangle$ i w $\langle \sqrt{2}; \infty)$, maleje w $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$
c) maleje w $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right\rangle$ i w $\left\langle 0; \frac{\sqrt{10}}{2}\right\rangle$, rośnie w $\left\langle -\frac{\sqrt{10}}{2}; 0\right\rangle$ i w $\left\langle \frac{\sqrt{10}}{2}; \infty\right)$
d) rośnie w $(-\infty; -3\rangle$ i w $\langle -\frac{1}{3}; \infty)$, maleje w $\langle -3; -\frac{1}{3}\rangle$
e) rośnie w $\mathbf{R}$
f) rośnie w $(-\infty; 0\rangle$ i w $\langle \frac{8}{3}; \infty)$, maleje w $\langle 0; \frac{8}{3}\rangle$

Ćwiczenie 5

a) maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
b) rośnie w $(-\infty; -8)$ i w $(-8; \infty)$
c) rośnie w $(-\infty; 1\rangle$ i w $\langle 7; \infty)$, maleje w $\langle 1; 4)$ i w $(4; 7\rangle$

Odpowiedzi do zadań

3. a) rośnie w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, maleje w $\langle -2; 2\rangle$
b) rośnie w $(-\infty; 1\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, maleje w $\langle 1; 2\rangle$
c) rośnie w $(-\infty; -7\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$, maleje w $\langle -7; 1\rangle$
d) maleje w $(-\infty; 2\rangle$ i w $\langle 6; \infty)$, rośnie w $\langle 2; 6\rangle$
e) maleje w $(-\infty; -1\rangle$, rośnie w $\langle -1; \infty)$
f) maleje w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 1; 2\rangle$, rośnie w $\langle -2; 1\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$
g) maleje w $(-\infty; -2\rangle$, rośnie w $\langle -2; \infty)$
h) rośnie w $(-\infty; -6\rangle$ i w $\langle -2; 2\rangle$, maleje w $\langle -6; -2\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ e) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ i) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

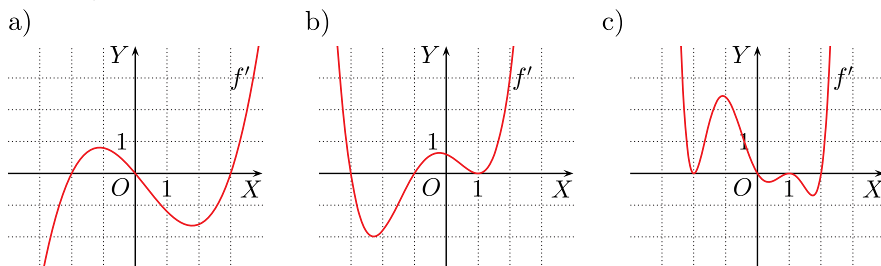
b) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ f) $f(x) = \frac{x^2+7}{x-3}$ j) $f(x) = \frac{4x-5}{x^2-1}$

c) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ g) $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{5-x}$ k) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-4}$

d) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}$ h) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ l) $f(x) = \frac{2x^2}{(x+3)^2}$

5. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f na podstawie wykresu jej pochodnej.

a) b) c)



6. Dla jakiej wartości parametru k funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + kx + 1$ c) $f(x) = x^3 + (k+2)x - 10$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + kx + 19$ d) $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 7$

7. Dla jakiej wartości parametru k funkcja f jest malejąca?

a) $f(x) = -x^3 + x^2 + kx + 14$ b) $f(x) = -5x^3 + kx + 10$

D **8.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wykaż, że dla każdej liczby $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x > x$.
>
> Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \operatorname{tg} x - x$.
>
> $$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$
>
> $f'(x) > 0$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ oraz funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 0; \frac{\pi}{2})$.
>
> Zauważmy, że $f(0) = 0$, więc $f(x) > 0$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
>
> Zatem dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ spełniona jest nierówność $\operatorname{tg} x > x$.

Wykaż, że dla każdej liczby $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ prawdziwa jest nierówność:

a) $\sin x < x$, *b) $\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3}x^3$.

4. a) rośnie w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, maleje w $\langle -2; 0)$ i w $(0; 2\rangle$
b) maleje w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \frac{1}{2}\rangle$, rośnie w $\langle \frac{1}{2}; \infty)$
c) rośnie w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$
d) maleje w $(-\infty; -1\rangle$ i w $(0, 1\rangle$, rośnie w $\langle -1; 0)$ i w $\langle 1; \infty)$
e) maleje w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$, rośnie w $\langle -1; 1\rangle$
f) rośnie w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 7; \infty)$, maleje w $\langle -1; 3)$ i w $(3; 7\rangle$
g) maleje w $(-\infty; 3\rangle$ i w $\langle 7; \infty)$, rośnie w $\langle 3; 5)$ i w $(5; 7\rangle$
h) rośnie w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; 0\rangle$, maleje w $\langle 0; 1)$ i w $(1; \infty)$
i) maleje w $(-\infty; 1-\sqrt{2}\rangle$ i w $\langle 1+\sqrt{2}; \infty)$, rośnie w $\langle 1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\rangle$
j) maleje w $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{2}\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, rośnie w $\langle \frac{1}{2}; 1)$ i w $(1; 2\rangle$
k) maleje w $(-\infty; -4\rangle$, $\langle -1; 2)$ i w $(2; \infty)$, rośnie w $\langle -4; -2)$ i w $(-2; -1\rangle$
l) rośnie w $(-\infty; -3)$ i w $\langle 0; \infty)$, maleje w $(-3; 0\rangle$

5. a) maleje w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 0; 3\rangle$, rośnie w $\langle -2; 0\rangle$ i w $\langle 3; \infty)$
b) rośnie w $(-\infty; -3\rangle$ i w $\langle -1; \infty)$, maleje w $\langle -3; -1\rangle$
c) rośnie w $(-\infty; 0\rangle$ i w $\langle 2; \infty)$, maleje w $\langle 0; 2\rangle$

6. a) $k \in \langle \frac{9}{4}; \infty)$
b) $k \in \langle \frac{3}{2}; \infty)$
c) $k \in \langle -2; \infty)$
d) $k \in \langle -3; 3\rangle$

7. a) $k \in (-\infty; -\frac{1}{3}\rangle$
b) $k \in (-\infty; 0\rangle$

8. a) Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \sin x - x$.
$f'(x) = \cos x - 1 < 0$ dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ oraz funkcja f jest ciągła w przedziale $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.
Zauważmy, że $f(0) = 0$, więc $f(x) < 0$ dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
Zatem dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność $\sin x < x$.
b) Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{1}{3}x^3$.
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2 x - x^2 = (\operatorname{tg} x + x)(\operatorname{tg} x - x) > 0$ dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
oraz funkcja f jest ciągła w przedziale $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.
Zauważmy, że $f(0) = 0$, więc $f(x) > 0$ dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
Zatem dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3}x^3$.

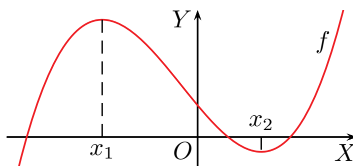
*4.14. Ekstrema funkcji

Uczeń:
- podaje ekstremum funkcji, korzystając z jej wykresu,
- wyznacza ekstremum funkcji, stosując warunki konieczny i wystarczający jego istnienia,
- wyznacza wartości parametrów tak, aby funkcja miała ekstremum w danym punkcie,
- uzasadnia, że dana funkcja nie ma ekstremum.

Definicja

Funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 **minimum lokalne** $f(x_0)$, jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ i $x \neq x_0$ zachodzi nierówność $f(x) > f(x_0)$.
Funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 **maksimum lokalne** $f(x_0)$, jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ i $x \neq x_0$ zachodzi nierówność $f(x) < f(x_0)$.

Minima lokalne i maksima lokalne nazywamy **ekstremami lokalnymi** (lub po prostu ekstremami).
Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji f. Ma ona maksimum lokalne w punkcie x_1 oraz minimum lokalne w punkcie x_2.

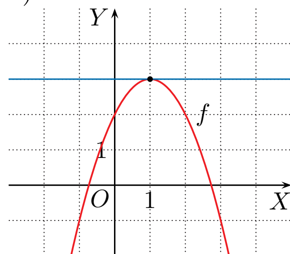


Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0) = 0$ (styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi OX).

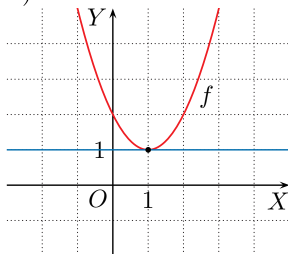
Przykład 1

a)



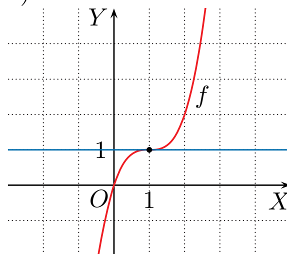
Funkcja $f(x) = -(x-1)^2+3$ osiąga maksimum w punkcie $x_0 = 1$.

b)



Funkcja $f(x) = (x-1)^2 + 1$ osiąga minimum w punkcie $x_0 = 1$.

c)



Funkcja $f(x) = (x-1)^3 + 1$ nie ma ekstremum w punkcie $x_0 = 1$.

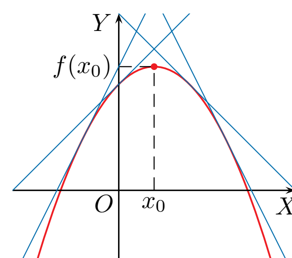
Zwróć uwagę na to, że wprawdzie wszystkie funkcje w powyższym przykładzie mają w punkcie $x_0 = 1$ pochodną równą 0 (styczna do wykresu funkcji jest dla $x_0 = 1$ równoległa do osi OX), ale tylko w podpunktach a) i b) funkcje mają w tym punkcie ekstremum.

Multiteka
• Ekstrema funkcji

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.14

Generator testów i sprawdzianów

Warunek $f'(x_0) = 0$ jest dla funkcji różniczkowalnej **warunkiem koniecznym istnienia ekstremum**, nie jest natomiast **warunkiem wystarczającym** (dostatecznym).



- Jeśli funkcja $f: (a;b) \to \mathbf{R}$ jest rosnąca w przedziale $(a; x_0\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle x_0; b)$, to ma w punkcie x_0 maksimum.
- Jeśli funkcja $f: (a;b) \to \mathbf{R}$ jest malejąca w przedziale $(a; x_0\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle x_0; b)$, to ma w punkcie x_0 minimum.

W przypadku funkcji różniczkowalnej o tym, czy funkcja rośnie, czy maleje w danym przedziale, można wnioskować na podstawie znaku pochodnej.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum

- Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a;b)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (a; x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to f ma w punkcie x_0 maksimum.
- Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a;b)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (a; x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to f ma w punkcie x_0 minimum.

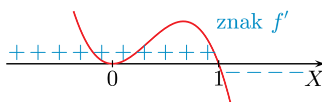
Uwaga. Często mówimy krótko, że jeżeli pochodna funkcji f zmienia w punkcie x_0 znak z dodatniego na ujemny, to funkcja f ma w tym punkcie maksimum, a jeżeli z ujemnego na dodatni, to funkcja ma w tym punkcie minimum.
Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i pochodna funkcji f w punkcie x_0 nie zmienia znaku, to w punkcie tym funkcja nie ma ekstremum.

Przykład 2

Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = -3x^4 + 4x^3$.

$f'(x) = -12x^3 + 12x^2$ Wyznaczamy pochodną funkcji f.

$f'(x) = 0$, gdy $-12x^3 + 12x^2 = 0$, czyli dla $x \in \{0, 1\}$ Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej.



Rozwiązania nierówności $f'(x) > 0$ oraz $f'(x) < 0$ odczytujemy ze szkicu wykresu pochodnej.

Zatem funkcja $f(x) = -3x^4 + 4x^3$ ma maksimum w punkcie $x_0 = 1$. Jest ono równe $f(1) = -3 + 4 = 1$.

Korzystamy z warunku dostatecznego istnienia ekstremum (w $x_0 = 1$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny).

W punkcie $x_0 = 0$ funkcja $f(x) = -3x^4 + 4x^3$ nie ma ekstremum, gdyż pochodna nie zmienia w tym punkcie znaku.

Ćwiczenie 1

Wyznacz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ d) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 4$ g) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ e) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ h) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 8x$ f) $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 4x^3 + 6$ i) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$

D Przykład 3

Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + 7$ nie ma ekstremum.

Wyznaczamy pochodną funkcji: $f'(x) = x^2 - 4x + 4$ i znajdujemy jej miejsca zerowe:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0 \text{ dla } x = 2$$

Stąd $f'(x) = 0$ dla $x = 2$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \neq 2$. Zatem funkcja f jest funkcją rosnącą w $\mathbf{R}$, więc nie ma ekstremum.

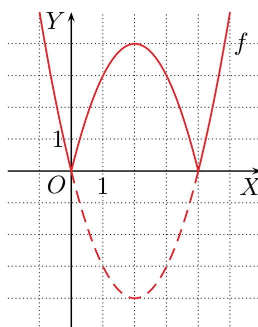
D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że funkcja f nie ma ekstremum.

a) $f(x) = -x^3 - 3x + 10$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ c) $f(x) = \frac{1}{x^3+x}$

Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = |(x-2)^2 - 4|$. Podaj jej ekstrema.



Z wykresu funkcji f odczytujemy, że ma ona jedno maksimum dla $x = 2$, $f(2) = 4$, oraz dwa minima dla $x = 0$, $f(0) = 0$, i dla $x = 4$, $f(4) = 0$.

Uwaga. Funkcja f nie jest różniczkowalna w punktach $x = 0$ oraz $x = 4$.

Z istnienia ekstremum w punkcie x_0 **nie wynika** istnienie pochodnej w x_0 (ale jeśli pochodna istnieje, to musi być równa 0).

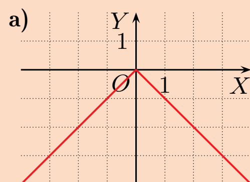
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj punkty, w których funkcja osiąga ekstrema. Określ, czy są to maksima, czy minima. Czy istnieje styczna do wykresu w tych punktach? Czy istnieje pochodna funkcji w tych punktach?

a) $f(x) = -|x|$ b) $f(x) = |x^2 - 4|$ c) $f(x) = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$

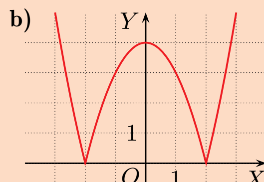
Ćwiczenie 3

a)



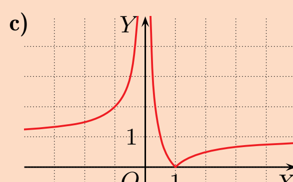
maksimum $f(0) = 0$
Nie istnieją ani pochodna funkcji w tym punkcie, ani styczna do wykresu w tym punkcie.

b)



minima $f(-2) = f(2) = 0$,
maksimum $f(0) = 4$
Pochodna oraz styczna do wykresu istnieją dla maksimum, ale nie istnieją dla minimów.

c)



minimum $f(1) = 0$
Nie istnieją ani pochodna funkcji w tym punkcie, ani styczna do wykresu w tym punkcie.

Ćwiczenie 1

a) $f'(x) = -3(x+1)(x-1)$,
minimum $f(-1) = 0$,
maksimum $f(1) = 4$

b) $f'(x) = 6(x-2)(x+1)$,
minimum $f(2) = -20$,
maksimum $f(-1) = 7$

c) $f'(x) = 2(x-4)(x+1)$,
minimum $f(4) = -\frac{112}{3}$,
maksimum $f(-1) = \frac{13}{3}$

d) $f'(x) = 12x^2(x-2)$,
minimum $f(2) = -12$

e) $f'(x) = 4x(x-2)(x-1)$,
minima $f(0) = f(2) = 0$,
maksimum $f(1) = 1$

f) $f'(x) = 4x^2(x^2-3)$,
minimum $f(\sqrt{3}) = -\frac{24}{5}\sqrt{3} + 6$,
maksimum $f(-\sqrt{3}) = \frac{24}{5}\sqrt{3} + 6$

g) $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ dla $x \neq 0$,
minimum $f(1) = 2$,
maksimum $f(-1) = -2$

h) $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$
dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$,
maksimum $f(0) = 0$

i) $f'(x) = -\frac{(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5})}{(x^2+4)^2}$,
minimum $f(-1-\sqrt{5}) = \frac{1-\sqrt{5}}{8}$,
maksimum $f(-1+\sqrt{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{8}$

Ćwiczenie 2

a) $f'(x) = -3x^2 - 3 = -3(x^2+1) < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, czyli nie ma punktu x_0, dla którego $f'(x_0) = 0$, zatem funkcja f nie ma ekstremum.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$,
$f'(x) = 0$ dla $x = 2$, $f'(x) > 0$ dla $x \neq 2$,
zatem funkcja f jest funkcją rosnącą w $\mathbf{R}$, więc nie ma ekstremum.

c) $f'(x) = -\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2} < 0$
dla $x \neq 0$, czyli nie ma punktu x_0, dla którego $f'(x_0) = 0$, zatem funkcja f nie ma ekstremum.

Zadania

1. Wyznacz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = -x^3+3x^2+9x$ d) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 6$ g) $f(x) = x + \frac{4}{x}$

b) $f(x) = x^3 - 12x - 3$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 3$ h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 10x$ f) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 1$ i) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

2. Wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x}$ c) $f(x) = \frac{-x^2+9}{x+5}$ e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ d) $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$ f) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-4}$

D **3.** Uzasadnij, że funkcja f nie ma ekstremum.

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 7x$ b) $f(x) = 2x^3-4x^2+3x$ c) $f(x) = -x^3 - x$

4. Dla jakiej wartości parametru m funkcja f osiąga minimum w punkcie $x_0 = 2$?

a) $f(x) = x^3 + 3mx^2 - 7$ b) $f(x) = x^3 - mx^2 + 6x$

5. Dla jakiej wartości parametru m funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0? Określ rodzaj tego ekstremum.

a) $f(x) = mx^3 - x^2 + x + 3,\ \ x_0 = -1$

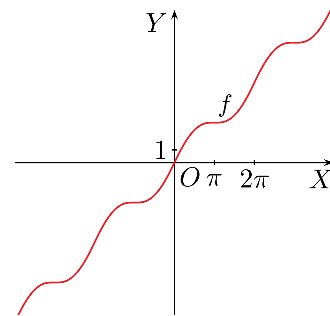
b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 5x - 3,\ \ x_0 = 1$

6. Dla jakich wartości parametru a funkcja f nie ma ekstremum?

a) $f(x) = -x^3 + ax$ b) $f(x) = x^3 - x^2 + ax$ c) $f(x) = \frac{x^2+ax}{x^2-9}$

7. a) Wyznacz wartości a i b, dla których funkcja $f(x) = \frac{x^2-ax+b}{x-5}$ osiąga ekstremum równe 1 w punkcie $x_0 = 3$. Rozstrzygnij, czy jest to minimum, czy maksimum. Czy jest to jedyne ekstremum lokalne tej funkcji?

b) Funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ osiąga ekstremum równe -1 dla $x = 2$. Rozstrzygnij, czy jest to minimum, czy maksimum.



D **8.** Uzasadnij, że funkcja $f(x) = x + \sin x$ (wykres obok) nie ma ekstremum, mimo że dla nieskończenie wielu argumentów x zachodzi równość $f'(x) = 0$.

3. a) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 7$, $\Delta < 0$, czyli nie istnieje $x \in \mathbf{R}$, dla którego $f'(x) = 0$. Zatem funkcja f nie ma ekstremum.
b) $f'(x) = 6x^2 - 8x + 3$, $\Delta < 0$, czyli nie istnieje $x \in \mathbf{R}$, dla którego $f'(x) = 0$. Zatem funkcja f nie ma ekstremum.
c) $f'(x) = -3x^2 - 1 < 0$, czyli nie istnieje $x \in \mathbf{R}$, dla którego $f'(x) = 0$. Zatem funkcja f nie ma ekstremum.

8. $f'(x) = 1 + \cos x$, $1 + \cos x = 0$, $\cos x = -1$ dla $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
Stąd $f'(x) = 0$ dla $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ oraz $f'(x) > 0$ dla pozostałych argumentów, czyli pochodna nie zmienia znaku. Zatem funkcja f nie ma ekstremum.

Odpowiedzi do zadań

1. a) minimum $f(-1) = -5$, maksimum $f(3) = 27$
b) minimum $f(2) = -19$, maksimum $f(-2) = 13$
c) minimum $f(2) = -11\frac{1}{3}$, maksimum $f(-5) = 45\frac{5}{6}$
d) minima $f(-2) = f(2) = -10$, maksimum $f(0) = 6$
e) minimum $f(0) = -3$
f) minimum $f(3) = -161$, maksimum $f(-3) = 163$
g) minimum $f(2) = 4$, maksimum $f(-2) = -4$
h) minimum $f(1) = \frac{3}{2}$
i) minimum $f(1) = 4$, maksimum $f(-1) = -4$

2. a) rośnie w $(-\infty; 0)$ i w $(0; 1\rangle$, maleje w $\langle 1; 2)$ i w $(2; \infty)$, maksimum $f(1) = -4$
b) rośnie w $(-\infty; -3)$ i w $(-3; 0\rangle$, maleje w $\langle 0; 3)$ i w $(3; \infty)$, maksimum $f(0) = 0$
c) rośnie w $\langle -9; -5)$ i w $(-5; -1\rangle$, maleje w $(-\infty; -9\rangle$ i w $\langle -1; \infty)$, minimum $f(-9) = 18$, maksimum $f(-1) = 2$
d) maleje w $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{13}+2}{3}\right\rangle$ i w $\left\langle \frac{\sqrt{13}-2}{3}; \infty\right)$, rośnie w $\left\langle -\frac{\sqrt{13}+2}{3}; \frac{\sqrt{13}-2}{3}\right\rangle$, minimum $f(-\frac{\sqrt{13}+2}{3}) = \frac{2-\sqrt{13}}{2}$, maksimum $f(\frac{\sqrt{13}-2}{3}) = \frac{\sqrt{13}+2}{2}$
e) rośnie w $(-\infty; -3\rangle$ i w $\langle 3; \infty)$, maleje w $\langle -3; -\sqrt{3})$, w $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ i w $(\sqrt{3}; 3\rangle$, minimum $f(3) = \frac{9}{2}$, maksimum $f(-3) = -\frac{9}{2}$
f) rośnie w $(-\infty; 4 - \sqrt{6}\rangle$ i w $\langle 4 + \sqrt{6}; \infty)$, maleje w $\langle 4 - \sqrt{6}; 4)$ i w $(4; 4 + \sqrt{6}\rangle$, minimum $f(4 + \sqrt{6}) = 5 + 2\sqrt{6}$, maksimum $f(4 - \sqrt{6}) = 5 - 2\sqrt{6}$

4. a) $m = -1$ **b)** $m = \frac{9}{2}$

5. a) minimum dla $m = -1$
b) maksimum dla $m = 3$

6. a) $a \in (-\infty; 0\rangle$ **b)** $a \in \langle \frac{1}{3}; \infty)$
c) $a \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

7. a) $a = 5$, $b = 4$, maksimum, minimum $f(7) = 9$
b) maksimum

*4.15. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji

Przypomnijmy, że jeśli funkcja ciągła f określona jest w przedziale domkniętym, to przyjmuje w tym przedziale wartości najmniejszą i największą.

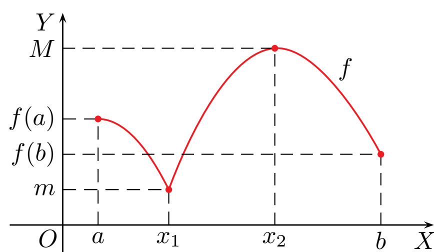
Wykres funkcji $f\colon \langle -1; 2\rangle \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = (x-1)^2$

Ćwiczenie 1

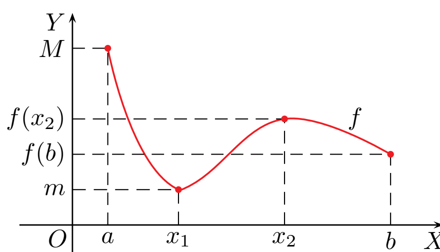
Podaj wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = (x-1)^2$ w przedziale:

a) $\langle -1; 2\rangle$ (rysunek obok), b) $\langle 2; 4\rangle$.

Wartością najmniejszą (największą) funkcji ciągłej f w przedziale $\langle a; b\rangle$ może być jedna z liczb $f(a)$, $f(b)$ lub jedno z ekstremów lokalnych.



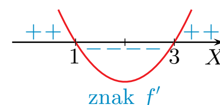
Wartość najmniejsza $m = f(x_1)$, wartość największa $M = f(x_2)$



Wartość najmniejsza $m = f(x_1)$, wartość największa $M = f(a)$

Przykład 1

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ w przedziale $\langle -1; 4\rangle$.



Wyznaczamy pochodną funkcji:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{1, 3\}$ – obie wartości należą do przedziału $\langle -1; 4\rangle$.

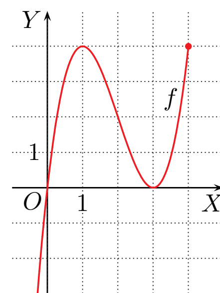
W punkcie $x_1 = 1$ funkcja osiąga maksimum: $f(1) = 4$.

W punkcie $x_2 = 3$ funkcja osiąga minimum: $f(3) = 0$.

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału:

$$f(-1) = -16, \quad f(4) = 4$$

Zatem najmniejszą wartością funkcji w przedziale $\langle -1; 4\rangle$ jest -16, a największą 4 – wartość ta przyjmowana jest dwukrotnie.



Uczeń:

- wyznacza wartości funkcji najmniejszą i największą w przedziale domkniętym,
- wyznacza zbiór wartości funkcji, stosując twierdzenie o przyjmowaniu wartości największej i najmniejszej,
- wykorzystuje wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w zadaniach z parametrem.

Ćwiczenie 1

a) najmniejsza: $f(1) = 0$, największa: $f(-1) = 4$

b) najmniejsza: $f(2) = 1$, największa: $f(4) = 9$

Ćwiczenie 2

a) najmniejsza: $f(2) = -4$,
największa: $f(4) = 4$

b) najmniejsza: $f(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$,
największa: $f(2) = 32$

Ćwiczenie 2

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$, $\langle 1; 4\rangle$ b) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$, $\langle 0; 2\rangle$

Przykład 2

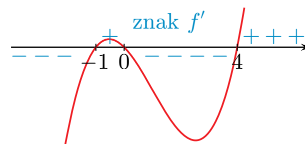
Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ w przedziale $\langle -2; 8\rangle$.

Wyznaczamy pochodną funkcji.

$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x = \frac{1}{4}x(x^2 - 3x - 4) = \frac{1}{4}x(x+1)(x-4)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 0, 4\}$.

Na rysunku obok przedstawiono zmianę znaku pochodnej w tych punktach.
Funkcja f posiada minima lokalne w punktach $x = -1$ i $x = 4$ oraz maksimum lokalne w punkcie $x = 0$.



Obliczamy wartości funkcji dla tych argumentów: $f(-1) = -\frac{3}{16}$, $f(0) = 0$, $f(4) = -8$ oraz wartości funkcji na końcach przedziału $\langle -2; 8\rangle$: $f(-2) = 1$, $f(8) = 96$.

Zatem najmniejsza wartość funkcji jest równa -8, a największa 96.

Ćwiczenie 3

a) $f'(x) = 4(x^3 - 1)$,
najmniejsza: $f(1) = -3$,
największa: $f(2) = 8$

b) $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$,
najmniejsza: $f(3) = \frac{1}{10}$,
największa: $f(1) = \frac{1}{2}$

c) $f'(x) = x(x-2)(x-1)$,
najmniejsza: $f(0) = f(2) = 0$,
największa: $f(-2) = 16$

d) $f'(x) = \frac{4(x^2-5)}{(x^2-4x+5)^2}$,
najmniejsza: $f(0) = 0$,
największa: $f(-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 4$

Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^4 - 4x$, $\langle 0; 2\rangle$

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\langle 1; 3\rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$, $\langle -2; 2\rangle$

d) $f(x) = \frac{-4x}{x^2-4x+5}$, $\langle -3; 0\rangle$

Czy wiesz, że...

Odkrycie warunku koniecznego istnienia ekstremum przypisuje się francuskiemu uczonemu Pierre'owi de Fermatowi (1601 lub 1607–1665), który dzięki swoim dokonaniom jest uważany za jednego z prekursorów rachunku różniczkowego. W pracy *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* podał metodę znajdowania minimów i maksimów funkcji.

Zadania

1. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ w podanym przedziale.

a) $\langle -1; 3\rangle$ b) $\langle 1; 3\rangle$ c) $\langle -1; 1\rangle$ d) $\langle -2; 4\rangle$

Odpowiedzi do zadań

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
$f(0) = 2$ – maksimum lokalne, $f(2) = -2$ – minimum lokalne

a) najmniejsza: $f(-1) = f(2) = -2$, największa: $f(3) = f(0) = 2$

b) najmniejsza: $f(2) = -2$, największa: $f(3) = 2$

c) najmniejsza: $f(-1) = -2$, największa: $f(0) = 2$

d) najmniejsza: $f(-2) = -18$, największa: $f(4) = 18$

2. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^3 - 6x + 1,\ \langle -2; 0\rangle$

b) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6,\ \langle -2; 1\rangle$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2,\ \langle -2; 4\rangle$

d) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 6,\ \langle -2; 2\rangle$

3. Oblicz wartości najmniejszą i największą funkcji f o dziedzinie D. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+3},\ D = \langle -1; 1\rangle$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x-3},\ D = \langle 4; 7\rangle$

c) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2},\ D = \langle 1; 2\rangle$

d) $f(x) = \frac{4x}{1+x^2},\ D = \langle -3; 3\rangle$

e) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2},\ D = \langle -2; 3\rangle$

f) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2},\ D = \langle -1; 2\rangle$

4. Dla jakiej wartości parametru p najmniejsza wartość funkcji:

$$f(x) = x^4 - 4x + p$$

w przedziale $\langle -1; 2\rangle$ jest równa 4?

5. Dla jakich wartości parametru m podane równanie ma rozwiązanie w przedziale $\langle -1; 2\rangle$?

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = m$

b) $x^5 - 5x + 4 = m$

6. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle -1; 3\rangle$?

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 2x^2}$

Wskazówka. W podpunkcie a) znajdź najpierw wartości największą i najmniejszą funkcji $g(x) = x^3 - 6x$ w przedziale $\langle -1; 3\rangle$.

7. Dla jakich wartości parametru m podane równanie ma rozwiązanie?

a) $3\cos x - 4\cos^3 x = m$

b) $2\sin^3 x - 3\sin x = m$

Wskazówka. W podpunkcie a) podstaw $t = \cos x$.

Czy wiesz, że…

Oznaczenie pochodnej funkcji f symbolem f' wprowadził francuski matematyk i fizyk Joseph Louis de Lagrange [czyt. lagranż] (1736–1813).

Inne używane oznaczenia pochodnej:

$\dot{f}$ – wprowadzone przez Isaaka Newtona (często stosowane przez fizyków),

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ – wprowadzone przez Gottfrieda Wilhelma Leibniza,

$\mathrm{D}_x f$ – wprowadzone przez Leonharda Eulera [czyt. ojlera] (1707–1783).

2. a) najmniejsza: $f(0) = 1$, największa: $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 1$
b) najmniejsza: $f(-2) = -10$, największa: $f(1) = 11$
c) najmniejsza: $f(3) = -25$, największa: $f(-1) = 7$
d) najmniejsza: $f(-2) = f(2) = -2$, największa: $f(-1) = f(1) = 7$

3. a) najmniejsza: $f(0) = \frac{2}{3}$, największa: $f(-1) = f(1) = \frac{3}{4}$, $f(D) = \langle \frac{2}{3}; \frac{3}{4}\rangle$
b) najmniejsza: $f(6) = 12$, największa: $f(4) = 16$, $f(D) = \langle 12; 16\rangle$
c) najmniejsza: $f(\frac{4}{3}) = -\frac{1}{8}$, największa: $f(1) = f(2) = 0$, $f(D) = \langle -\frac{1}{8}; 0\rangle$
d) najmniejsza: $f(-1) = -2$, największa: $f(1) = 2$, $f(D) = \langle -2; 2\rangle$
e) najmniejsza: $f(3) = \frac{1}{100}$, największa: $f(0) = 1$, $f(D) = \langle \frac{1}{100}; 1\rangle$
f) najmniejsza: $f(0) = \frac{1}{2}$, największa: $f(-1) = 1$, $f(D) = \langle \frac{1}{2}; 1\rangle$

4. $p = 7$

5. a) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$,
$f'(x) = 4x(x^2 - 5)$,
$f(0) = 9,\ f(-1) = 0$,
$f(2) = -15$,
$m \in \langle -15; 9\rangle$
b) $f(x) = x^5 - 5x + 4$,
$f'(x) = 5(x^2+1)(x+1)(x-1)$,
$f(-1) = 8,\ f(1) = 0$,
$f(2) = 26,\ m \in \langle 0; 26\rangle$

6. a) $g(x) = x^3 - 6x$
$g'(x) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
$g(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2},\ g(-1) = 5,\ g(3) = 9$
$m_g \in \langle -4\sqrt{2}; 9\rangle$
Zatem $m \in \langle -\sqrt[6]{32}; \sqrt[3]{9}\rangle$.
b) $g(x) = x^4 - 2x^2$
$g'(x) = 4x(x-1)(x+1)$
$g(-1) = g(1) = -1, g(3) = 63$
$m_g \in \langle -1; 63\rangle$
Zatem $m \in \langle -1; \sqrt[3]{63}\rangle$.

7. a) $t = \cos x \in \langle -1; 1\rangle$
$f(t) = 3t - 4t^3$
$f'(t) = 3 - 12t^2 = 0$ dla $t = -\frac{1}{2}$ lub $t = \frac{1}{2}$
$f(-\frac{1}{2}) = -1,\ f(\frac{1}{2}) = 1$,
$f(-1) = 1,\ f(1) = -1,\ m \in \langle -1; 1\rangle$
b) $t = \sin x \in \langle -1; 1\rangle$
$f(t) = 2t^3 - 3t$
$f'(t) = 6t^2 - 3 = 0$ dla $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2},\ f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$,
$f(-1) = 1,\ f(1) = -1,\ m \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$

Uczeń:
- wykorzystuje umiejętność wyznaczania najmniejszej i największej wartości funkcji w zadaniach optymalizacyjnych.

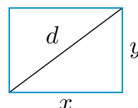
*4.16. Zagadnienia optymalizacyjne

Jednym z najczęstszych zastosowań rachunku różniczkowego jest jego wykorzystanie do wyznaczania wartości największej lub najmniejszej – zagadnienia takie będziemy nazywać **zagadnieniami optymalizacyjnymi**.
Jeśli mamy wyznaczyć największą (najmniejszą) wartość funkcji kwadratowej, to zamiast korzystać z rachunku różniczkowego, możemy skorzystać ze wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli.

Przykład 1

Który z prostokątów o obwodzie 12 cm ma najkrótszą przekątną? Jaka jest jej długość?

Oznaczamy długości boków prostokąta przez x i y, a długość jego przekątnej przez d, wówczas:



$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

oraz

$$2x + 2y = 12$$

stąd $x + y = 6$, czyli $y = 6 - x$.
Zauważmy, że: $0 < x < 6$ i $0 < y < 6$.

Wykonujemy (jeśli to możliwe) rysunek i wprowadzamy oznaczenia literowe.

Piszemy równanie wyrażające wielkość, której najmniejszą (największą) wartość chcemy wyznaczyć za pomocą innych zmiennych, oraz inne równania wynikające z treści zadania.

Zatem długość przekątnej w zależności od x opisana jest przez funkcję:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (6 - x)^2}$$

gdzie $x \in (0; 6)$.

Podstawiamy $y = 6 - x$ i otrzymujemy funkcję jednej zmiennej. Określamy dziedzinę tej funkcji.

$$d(x) = \sqrt{x^2 + 36 - 12x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$$

Wyznaczamy najmniejszą wartość funkcji kwadratowej:

$$k(x) = 2x^2 - 12x + 36$$

$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{4} = 3, \quad k(3) = 18$$

Funkcje d i $k(x) = d^2(x)$ najmniejszą wartość przyjmują dla tego samego argumentu.

Czyli najmniejsza wartość funkcji d to $d(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
$y = 6 - x = 3$, zatem szukany prostokąt jest kwadratem o boku 3 cm. Jego przekątna ma długość $3\sqrt{2}$ cm.

Ćwiczenie 1

a) Który z prostokątów o obwodzie 60 cm ma największe pole?

b) Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie 16 cm i ramieniu 10 cm. Dwa wierzchołki prostokąta należą do podstawy tego trójkąta, pozostałe dwa do jego ramion. Wyznacz największe możliwe pole takiego prostokąta.

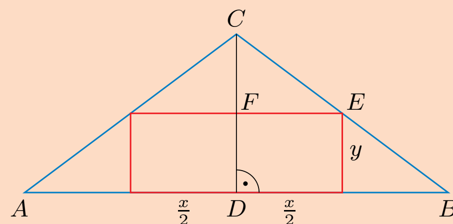
Ćwiczenie 1

a) Niech x, y – długości boków prostokąta.
$2x + 2y = 60$, stąd $y = 30 - x$, gdzie $x \in (0; 30)$
Pole prostokąta:
$P(x) = x(30 - x) = -x^2 + 30x$, $x \in (0; 30)$
$x_w = 15$
Największa wartość funkcji: $P(15) = 225$
Zatem szukany prostokąt jest kwadratem o boku 15 cm.

b) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
$|CD| = 6$ cm
Z podobieństwa trójkątów BCD i ECF (cecha KKK) otrzymujemy:

$$\frac{|DB|}{|FE|} = \frac{|CD|}{|CF|}$$

$$\frac{8}{\frac{x}{2}} = \frac{6}{6-y}$$



stąd $y = 6 - \frac{3}{8}x$, gdzie $x \in (0; 16)$.
Pole prostokąta:

$$P(x) = x\left(6 - \frac{3}{8}x\right) = -\frac{3}{8}x^2 + 6x, \ x \in (0; 16)$$

$x_w = 8$
Największa wartość funkcji $P(8) = 24$.
Zatem szukane pole jest równe 24 cm².

Multiteka
- Zastosowanie rachunku różniczkowego – problem optymalizacyjny

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.16

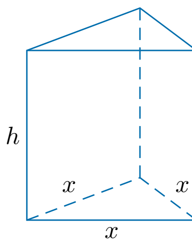


Przykład 2

Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12. Jaką największą objętość może mieć ten graniastosłup?

Długości krawędzi podstawy graniastosłupa oznaczamy przez x, a jego wysokość przez h. Pole podstawy, która jest trójkątem równobocznym, opisuje wzór:

$$P = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$



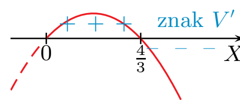
Zatem objętość graniastosłupa:

$$V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Suma długości krawędzi graniastosłupa jest równa 12, czyli $6x+3h = 12$, stąd wyznaczamy wysokość $h = 4 - 2x$, gdzie $x \in (0;2)$. Zatem:

$$V(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}(4-2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(2x^2 - x^3)$$

Wyznaczamy pochodną funkcji V:



$$V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(4x - 3x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(4-3x),\ D_{V'} = (0;2)$$

$V'(x) > 0$ dla $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ oraz $V'(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{4}{3}; 2\right)$.

Funkcja V jest ciągła, zatem rośnie w przedziale $\left(0; \frac{4}{3}\right\rangle$ i maleje w przedziale $\left\langle\frac{4}{3}; 2\right)$, czyli w punkcie $x_0 = \frac{4}{3}$ przyjmuje maksimum: $V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{27}\sqrt{3}$.

Największa możliwa objętość takiego graniastosłupa jest równa $\frac{16}{27}\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2

a) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Jaką największą objętość może mieć ten graniastosłup?

b) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 96. Jakie wymiary powinien mieć ten graniastosłup, aby jego objętość była największa?

c) Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 16. Jakie wymiary powinien mieć ten graniastosłup, aby jego pole powierzchni całkowitej było najmniejsze?

Ćwiczenie 3

a) Przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratowej ma długość 6 cm. Wyznacz wymiary prostopadłościanu tak, aby jego objętość była największa.

b) Objętość prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równa 27 cm^3. Wyznacz wymiary prostopadłościanu tak, aby jego pole powierzchni całkowitej było najmniejsze.

Ćwiczenie 2

Niech x – długość krawędzi podstawy, h – wysokość graniastosłupa.

a) $8x + 4h = 16$

$h = -2x + 4$, gdzie $x \in (0;2)$

$V(x) = x^2(-2x+4) =$

$= -2x^3 + 4x^2$

$V'(x) = -6x^2 + 8x =$

$= -2x(3x-4)$, $D_{V'} = (0;2)$

$V'(x) > 0$ dla $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ oraz

$V'(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{4}{3}; 2\right)$

największa objętość: $V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27}$

b) $12x + 6h = 96$

$h = 16 - 2x$, gdzie $x \in (0;8)$

$V(x) = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot (16-2x) =$

$= -3\sqrt{3}x^3 + 24\sqrt{3}x^2$

$V'(x) = 3\sqrt{3}x(16-3x)$,

$D_{V'} = (0;8)$

Dla $x = \frac{16}{3}$ funkcja V przyjmuje maksimum, czyli $h = \frac{16}{3}$.

Największą objętość ma graniastosłup, którego wszystkie krawędzie są równe $\frac{16}{3}$.

c) $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 16$

$h = \frac{64\sqrt{3}}{3x^2}$, gdzie $x > 0$

$P(x) = 2 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 3x \cdot \frac{64\sqrt{3}}{3x^2} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{64\sqrt{3}}{x}$

$P'(x) = \sqrt{3}x - \frac{64\sqrt{3}}{x^2}$, $x > 0$

Dla $x = 4$ funkcja P przyjmuje minimum, czyli $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Szukany graniastosłup ma krawędź podstawy 4 i wysokość $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Ćwiczenie 3

Niech x – długość krawędzi podstawy, h – wysokość prostopadłościanu.

a) $(x\sqrt{2})^2 + h^2 = 36$

$x = \sqrt{18 - \frac{1}{2}h^2}$, gdzie $h \in (0;6)$

$V(h) = \left(18 - \frac{1}{2}h^2\right)h = -\frac{1}{2}h^3 + 18h$

$V'(h) = -\frac{3}{2}h^2 + 18$, $D_{V'} = (0;6)$

Dla $h = 2\sqrt{3}$ funkcja V przyjmuje maksimum, czyli $x = 2\sqrt{3}$.

Szukany prostopadłościan ma wszystkie krawędzie równe $2\sqrt{3}$ cm.

b) Objętość: $x^2h = 27$

$h = \frac{27}{x^2}$, gdzie $x > 0$

$P(x) = 2x^2 + 4x \cdot \frac{27}{x^2} = 2x^2 + \frac{108}{x}$

$P'(x) = 4x - \frac{108}{x^2}$, $x > 0$

Dla $x = 3$ funkcja P przyjmuje minimum, czyli $h = 3$.

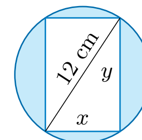
Szukany prostopadłościan ma wszystkie krawędzie równe 3 cm.

Zadania

1. Który z prostokątów o polu 50 cm^2 ma najmniejszy obwód?

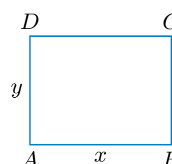
2. Powierzchnia zadrukowanej części kartki ma wynosić 192 cm^2. Marginesy górny i dolny mają mieć po 2 cm, a marginesy boczne – po 1,5 cm. Jakie powinny być wymiary tej kartki, aby jej powierzchnia była najmniejsza?

3. Prostokąt o bokach długości x i y jest wpisany w okrąg o średnicy równej 12 cm (rysunek obok). Jakie powinny być wymiary tego prostokąta, aby iloczyn $x \cdot y^2$ miał największą wartość?



4. Właściciel hurtowni mebli ogrodowych poprosił swojego syna Karola o pomoc w rozwiązaniu następującego problemu. Należy ogrodzić prostokątny plac wystawowy o powierzchni 160 m^2. Trzy boki prostokąta mają być ogrodzone płotem drewnianym (koszt: 200 zł za metr bieżący płotu), a czwarty – ścianą z cegły (koszt: 800 zł za metr bieżący ściany). Jakie wymiary powinien mieć ten plac, aby koszt ogrodzenia był najmniejszy?

W ramce poniżej podany jest fragment rozwiązania przedstawionego przez Karola. Dokończ to rozwiązanie.

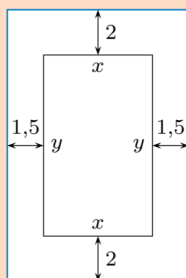
> Oznaczmy przez x i y boki prostokąta. Przyjmijmy, że ściana z cegły powstanie wzdłuż boku BC. Wówczas koszt ogrodzenia (w złotych) można przedstawić za pomocą wzoru:
>
> 
>
>
> $$k = (2x + y) \cdot 200 + y \cdot 800 = 400x + 1000y$$
>
> Powierzchnia placu jest równa 160 m^2, czyli $x \cdot y = 160$, więc $y = \frac{160}{x}$.
>
> Zatem należy znaleźć argument $x > 0$, dla którego funkcja:
>
> $$k(x) = 400x + \frac{160\,000}{x}$$
>
> przyjmuje wartość najmniejszą.
>
> Obliczamy pochodną funkcji k.

5. Pudełko w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o objętości 96 dm^3 ma zostać wykonane z dwóch rodzajów materiału. Materiał na dolną podstawę kosztuje 200 zł/m^2, zaś materiał na górną podstawę i ściany boczne – 100 zł/m^2. Jakie wymiary powinno mieć to pudełko, aby koszt jego wykonania był jak najmniejszy? Ile wyniesie koszt materiału potrzebnego na jego wykonanie?

Odpowiedzi do zadań

1. Niech x, y – długości boków prostokąta.
$x \cdot y = 50$, czyli $y = \frac{50}{x}$, gdzie $x > 0$
Obwód prostokąta:
$f(x) = 2x + \frac{100}{x}$
$f'(x) = 2 - \frac{100}{x^2}$, $x > 0$
Dla $x = 5\sqrt{2}$ funkcja f przyjmuje minimum, czyli $y = 5\sqrt{2}$.
Zatem szukany prostokąt jest kwadratem o boku $5\sqrt{2}$ cm.

2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$x \cdot y = 192$, czyli $y = \frac{192}{x}$, gdzie $x > 0$
$P(x) = (x + 3)\left(\frac{192}{x} + 4\right) =$
$= 204 + 4x + \frac{576}{x}$
$P'(x) = 4 - \frac{576}{x^2}$, $x > 0$
Dla $x = 12$ funkcja P przyjmuje minimum, czyli $y = 16$.
$x + 3 = 15$ oraz $y + 4 = 20$
Wymiary kartki:
15 cm $\times$ 20 cm

3. $x^2 + y^2 = 144$, czyli
$y = \sqrt{144 - x^2}$, $x \in (0; 12)$
$f(x) = x(144 - x^2) =$
$= -x^3 + 144x$
$f'(x) = -3x^2 + 144$, $x \in (0; 12)$
Dla $x = 4\sqrt{3}$ funkcja f przyjmuje maksimum, czyli $y = 4\sqrt{6}$.
Zatem $x = 4\sqrt{3}$ cm, $y = 4\sqrt{6}$ cm.

4. $k'(x) = 400 - \frac{160\,000}{x^2}$, gdzie $x > 0$
Dla $x = 20$ funkcja k przyjmuje minimum, czyli $y = 8$.
Wymiary placu: 20 m $\times$ 8 m, gdzie ściana z cegły ma długość 8 m.

5. Niech x – krawędź podstawy, y – wysokość graniastosłupa.
koszt materiału na dolną podstawę: 2 zł/dm^2
koszt materiału na górną podstawę i ściany boczne: 1 zł/dm^2

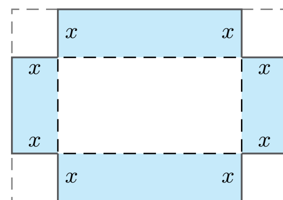
$$x^2 y = 96 \text{ dm}^3$$

$$y = \frac{96}{x^2}, \text{ gdzie } x, y > 0$$

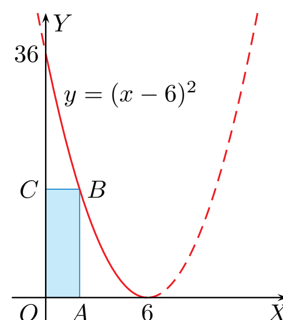
$$k(x) = 2x^2 + x^2 + 4x\frac{96}{x^2} = 3x^2 + \frac{384}{x}$$

$k'(x) = 6x - \frac{384}{x^2} = \frac{6\left(x^3 - 64\right)}{x^2}$
minimum lokalne dla $x = 4$ dm, czyli $y = 6$ dm,
najmniejszy koszt: $k(4) = 144$ zł

6. W rogach prostokątnego arkusza blachy o wymiarach 36 cm i 24 cm wycięto cztery przystające kwadraty. Następnie po zgięciu blachy wzdłuż linii zaznaczonych na rysunku otrzymano pudełko (bez górnej ścianki) o największej możliwej objętości. Oblicz wysokość pudełka.



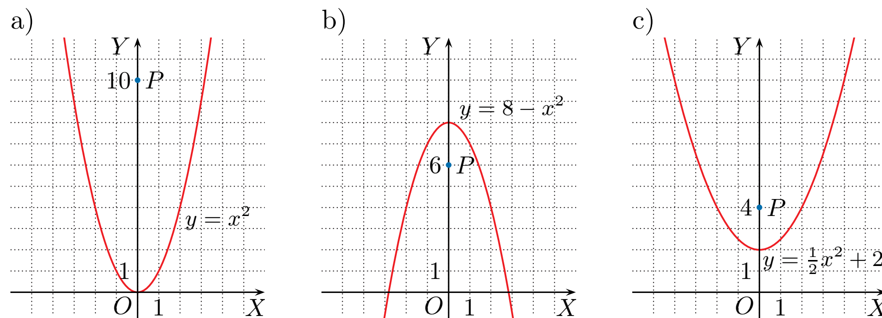
7. Drut długości a dzielimy na dwie części. Z pierwszej wykonujemy szkielet sześcianu, a z drugiej – szkielet prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i polu ściany bocznej dwukrotnie większym niż pole podstawy. W jakiej proporcji należy podzielić ten drut, aby suma objętości tych brył była najmniejsza?



8. Wierzchołki A i C prostokąta $OABC$ należą do osi układu współrzędnych. Wierzchołek B należy do paraboli o równaniu $y = (x-6)^2$, $x \in (0;6)$ (rysunek obok). Dla jakiej długości boków tego prostokąta jego pole będzie największe?

9. Wierzchołki trapezu należą do paraboli $y = -x^2 + 4$, przy czym końce dłuższej podstawy są punktami, w których parabola przecina oś OX. Wyznacz największe możliwe pole takiego trapezu.

10. Wyznacz punkty należące do paraboli, których odległość od punktu P jest najmniejsza.



11. W jakim punkcie paraboli $y = x^2 - 1$ należy poprowadzić styczną, aby trójkąt ograniczony osiami układu współrzędnych i tą styczną miał najmniejsze pole?

6. $V(x) = (36-2x)(24-2x)x =$
$= 4x^3 - 120x^2 + 864x$,
gdzie $x \in (0;12)$
$V'(x) = 12x^2 - 240x + 864$
Dla $x = 10 - 2\sqrt{7}$ funkcja V przyjmuje maksimum.
Zatem wysokość pudełka jest równa $\left(10 - 2\sqrt{7}\right)$ cm.

7. Niech x – długość krawędzi sześcianu, y – długość krawędzi podstawy prostopadłościanu, $2y$ – wysokość prostopadłościanu.
$12x + 16y = a$, czyli
$y = \frac{a}{16} - \frac{3}{4}x$, gdzie $x \in \left(0; \frac{a}{12}\right)$
$V(x) = x^3 + 2\left(\frac{a}{16} - \frac{3}{4}x\right)^3$
$V'(x) = 3x^2 - \frac{9}{2}\left(\frac{a-12x}{16}\right)^2$
$V'(x) = 0$, czyli
$3x^2 = \frac{9}{2}\left(\frac{a-12x}{16}\right)^2$, gdzie
$x, a - 12x > 0$
$\sqrt{3}x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a-12x}{16}$
$a - 12x = \frac{16\sqrt{6}}{3}x$
Szukana proporcja:
$\frac{12x}{16y} = \frac{12x}{a-12x} = \frac{12x}{\frac{16\sqrt{6}}{3}x} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

8. $|OA| = 2$, $|OC| = 16$

9. $\frac{256}{27}$

10. a) $Q(x, x^2)$,
$f(x) = |PQ|^2 =$
$= x^4 - 19x^2 + 100$,
$f'(x) = 2x(2x^2 - 19)$,
$f_{\min}\left(-\sqrt{\frac{19}{2}}\right) = f_{\min}\left(\sqrt{\frac{19}{2}}\right)$
$\left(-\sqrt{\frac{19}{2}}, \frac{19}{2}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{19}{2}}, \frac{19}{2}\right)$

b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$,
$f'(x) = 2x(2x^2 - 3)$,
$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{13}{2}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{13}{2}\right)$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 4$,
$f'(x) = x(x^2 - 2)$,
$(-\sqrt{2}, 3)$, $(\sqrt{2}, 3)$

11. Niech (x_0, y_0) będzie punktem styczności.
Równanie stycznej: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, gdzie $f(x_0) = x_0^2 - 1$, czyli $f'(x_0) = 2x_0$.
Zatem równanie stycznej przyjmuje postać $y = -x_0^2 + 2x_0x - 1$.
Punkty przecięcia stycznej z osiami układu współrzędnych to $\left(0, -x_0^2 - 1\right)$, $\left(\frac{x_0^2+1}{2x_0}, 0\right)$.
$P(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0^2 + 1\right) \cdot \frac{x_0^2+1}{2x_0} = \frac{x_0^3}{4} + \frac{x_0}{2} + \frac{1}{4x_0}$
$P'(x_0) = \frac{3x_0^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4x_0^2} = \frac{3x_0^4 + 2x_0^2 - 1}{4x_0^2}$
Najmniejszą wartość osiąga dla $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Zatem szukane punkty to $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Uczeń:
- podaje schemat badania własności funkcji,
- bada własności funkcji i zapisuje je w tabeli,
- szkicuje wykres funkcji na podstawie jej własności.

*4.17. Szkicowanie wykresu funkcji

Umiejętność obliczania granic oraz określania przedziałów monotoniczności i ekstremów funkcji na podstawie jej pochodnej pozwala naszkicować wykresy wielu funkcji. W tym celu badamy **przebieg zmienności funkcji**, postępując według następującego schematu.

1. Określamy dziedzinę funkcji.
2. Znajdujemy punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.
3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja jest określona, oraz wyznaczamy asymptoty wykresu funkcji, jeśli istnieją.
4. Wyznaczamy pochodną funkcji i określamy jej dziedzinę.
5. Wyznaczamy przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji.

Wszystkie otrzymane wyniki możemy zebrać w tabeli, a następnie naszkicować wykres funkcji.

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Szukamy punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
   $f(0) = 0$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 0)$.
   Aby znaleźć punkty, w których wykres przecina oś OX, rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$:
   $$\frac{1}{4}x^4 - x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ lub } x = 4$$
   Zatem wykres funkcji f przecina oś OX w punktach $(0, 0)$ i $(4, 0)$.
3. Obliczamy granice funkcji f w $-\infty$ i w ∞:
   $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\right) \overset{\left[\infty\cdot\frac{1}{4}\right]}{=} \infty$$
   $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3\right) = \lim_{x\to\infty} x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\right) \overset{\left[\infty\cdot\frac{1}{4}\right]}{=} \infty$$
   Zatem wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej.
4. Wyznaczamy pochodną funkcji f:
   $$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3\right)' = x^3 - 3x^2$$
   i określamy jej dziedzinę: $D_{f'} = \mathbf{R}$.

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.17

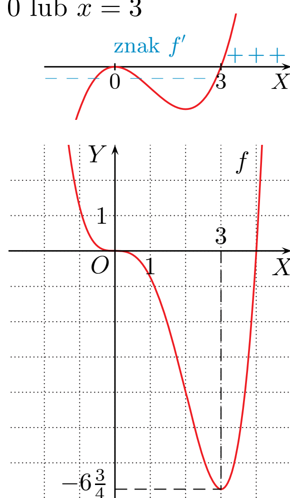
Generator testów i sprawdzianów

5. Wyznaczamy przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji f.
   Szukamy miejsc zerowych pochodnej:
$$x^3 - 3x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x-3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ lub } x = 3$$
   Ze szkicu wykresu f' (rysunek obok) odczytujemy rozwiązania nierówności:

   $f'(x) > 0$ dla $x \in (3;\infty)$,

   $f'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty;0) \cup (0;3)$.

   Funkcja f jest ciągła, zatem rośnie w przedziale $\langle 3;\infty)$ i maleje w przedziale $(-\infty;3\rangle$. Dla $x_0 = 3$ funkcja osiąga minimum $f(3) = -6\frac{3}{4}$.



Sprawdź otrzymany wykres, korzystając z odpowiedniego programu komputerowego.

Otrzymane wyniki zbieramy w tabeli i szkicujemy wykres funkcji f (rysunek obok).

x	$x<0$	0	$0<x<3$	3	$3<x<4$	4	$x>4$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\infty \searrow$	0	$\searrow$	$-6\frac{3}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow \infty$

Strzałką $\searrow$ oznaczamy, że funkcja maleje, a strzałką $\nearrow$ – że rośnie.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -x^3 + 3x$ b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ c) $f(x) = -x^4 + 2x^2$

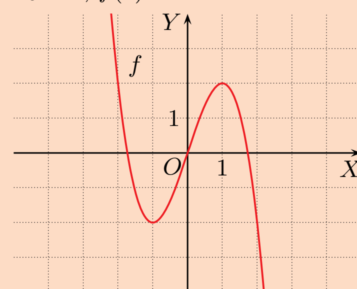
Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

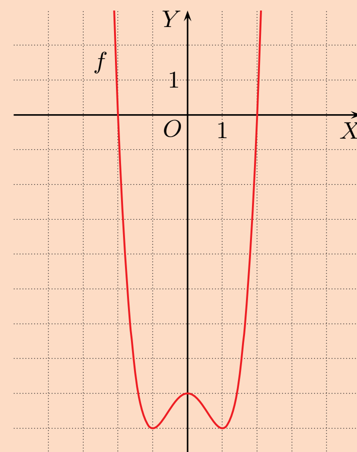
1. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Szukamy punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
   $f(0) = 1$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0,1)$.
   Równanie $\frac{1}{x^2+1} = 0$ nie ma rozwiązań, więc wykres nie przecina osi OX.
3. Obliczamy granice funkcji f w $-\infty$ i w ∞:
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \text{ oraz } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$
   Zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $-\infty$ i w ∞.
4. Wyznaczamy pochodną funkcji f:
$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$
   oraz określamy jej dziedzinę: $D_{f'} = \mathbf{R}$.

Ćwiczenie 1

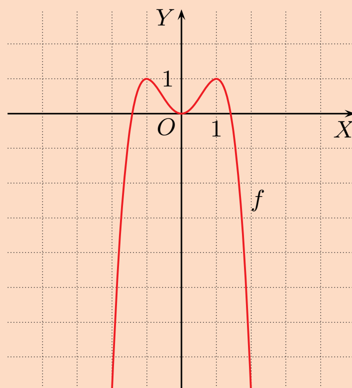
a) $f(x) = -x^3 + 3x$
1. $D_f = \mathbf{R}$
2. $(0,0)$, $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, brak asymptot poziomych
4. $f'(x) = -3x^2 + 3$, $D_{f'} = \mathbf{R}$
5. Funkcja jest:
– rosnąca w przedziale $(-1;1)$
– malejąca w przedziałach $(-\infty;-1)$ i $(1;\infty)$
Funkcja osiąga:
– minimum lokalne dla $x_0 = -1$, $f(-1) = -2$
– maksimum lokalne dla $x_0 = 1$, $f(1) = 2$



b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$
1. $D_f = \mathbf{R}$
2. $(0,-8)$, $(-2,0)$, $(2,0)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, brak asymptot poziomych
4. $f'(x) = 4x^3 - 4x$, $D_{f'} = \mathbf{R}$
5. Funkcja jest:
– rosnąca w przedziałach $(-1;0)$ i $(1;\infty)$
– malejąca w przedziałach $(-\infty;-1)$ i $(0;1)$
Funkcja osiąga:
– minimum lokalne dla $x_0 = -1$, $f(-1) = -9$ oraz dla $x_0 = 1$, $f(1) = -9$
– maksimum lokalne dla $x_0 = 0$, $f(0) = -8$

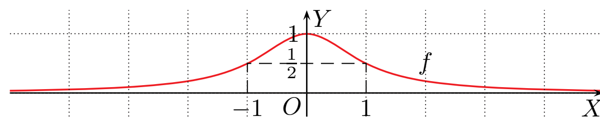


c) $f(x) = -x^4 + 2x^2$
1. $D_f = \mathbf{R}$
2. $(0,0)$, $(-\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2},0)$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$, brak asymptot poziomych
4. $f'(x) = -4x^3 + 4x$, $D_{f'} = \mathbf{R}$
5. Funkcja jest:
– rosnąca w przedziałach $(-\infty;-1)$ i $(0;1)$
– malejąca w przedziałach $(-1;0)$ i $(1;\infty)$
Funkcja osiąga:
– minimum lokalne dla $x_0 = 0$, $f(0) = 0$
– maksimum lokalne dla $x_0 = -1$, $f(-1) = 1$ oraz dla $x_0 = 1$, $f(1) = 1$



5. Mianownik we wzorze pochodnej jest dodatni dla $x \in \mathbf{R}$, więc znak pochodnej ustalamy na podstawie licznika: $f'(x) > 0$ dla $x < 0$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > 0$. Funkcja f jest ciągła, zatem rośnie w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ oraz maleje w przedziale $\langle 0; \infty)$. Dla $x_0 = 0$ funkcja osiąga maksimum $f(0) = 1$.

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$



Wykres funkcji f jest symetryczny względem osi OY.

Zwróć uwagę na to, że oprócz wykorzystania danych z tabeli warto wyznaczyć kilka dodatkowych punktów należących do wykresu funkcji, np. $(1, \frac{1}{2})$, $(-1, \frac{1}{2})$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ b) $f(x) = \frac{9}{x^2-2x+4}$ c) $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$

Zadania

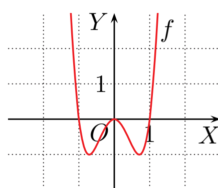
1. Naszkicuj wykres funkcji f.

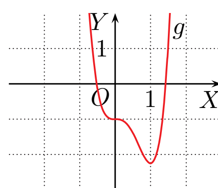
a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ b) $f(x) = 6x^2 - x^4$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2$

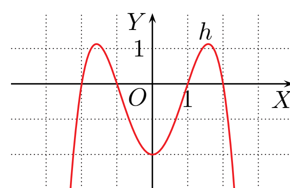
2. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{4x^2+1}{x^2+4}$ b) $f(x) = \frac{4}{x^2+2x+2}$ c) $f(x) = \frac{1-x}{x^2+3}$

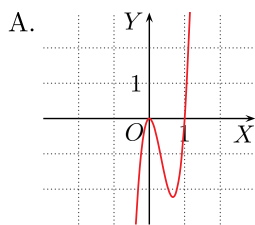
3. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji f, g i h.

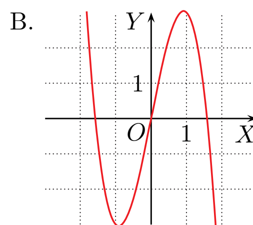


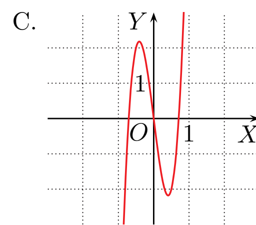




Wykresy pochodnych tych funkcji przedstawione są na rysunkach A, B, C. Dopasuj pochodne do funkcji.

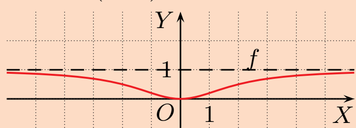
A.


B.


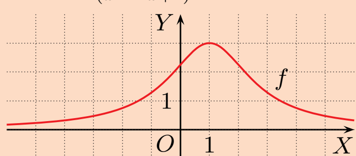
C.


Ćwiczenie 2

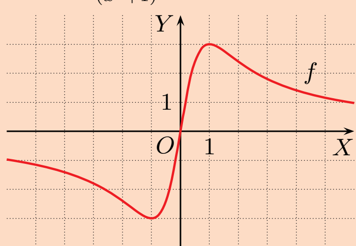
a) Prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji w $\pm\infty$.
$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$



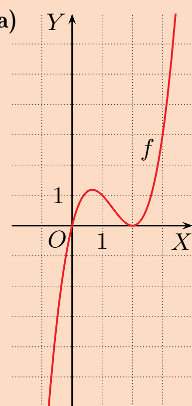
b) Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji w $\pm\infty$.
$f'(x) = \frac{-18(x-1)}{(x^2-2x+4)^2}$



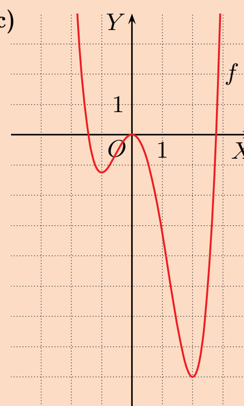
c) Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji w $\pm\infty$.
$f'(x) = \frac{6(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

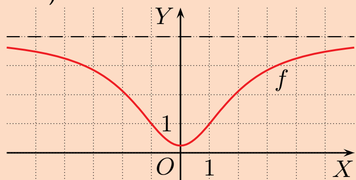


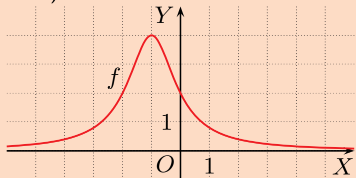
Odpowiedzi do zadań

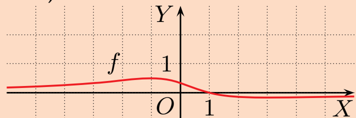
1. a)


b)


c)


2. a)


b)


c)


3. f – C, g – A, h – B

*4.18. Zagadnienia uzupełniające

Szkicowanie wykresu funkcji

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

   Dla każdego $x \in D_f$ mamy $-x \in D_f$ oraz:

   $$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = \frac{-x}{x^2-1} = -f(x)$$

   Warto sprawdzić parzystość funkcji.

   Zatem funkcja jest nieparzysta (patrz str. 29), czyli jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

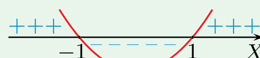
2. $f(0) = 0$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 0)$.
   $f(x) = 0$ dla $x = 0$, zatem punkt $(0, 0)$ jest też jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji i osi OX.

3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja f jest określona:

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

   Prosta $y = 0$ jest obustronną asymptotą poziomą wykresu funkcji f.

   $$\lim_{x\to-1^-} \frac{x}{x^2-1} \overset{\left[\frac{-1}{0^+}\right]}{=} -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{x}{x^2-1} \overset{\left[\frac{-1}{0^-}\right]}{=} \infty$$

   Szkic wykresu funkcji $y = x^2 - 1$

   $$\lim_{x\to1^-} \frac{x}{x^2-1} \overset{\left[\frac{1}{0^-}\right]}{=} -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x}{x^2-1} \overset{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=} \infty$$

   Proste $x = -1$ oraz $x = 1$ są asymptotami pionowymi (obustronnymi) wykresu funkcji f.

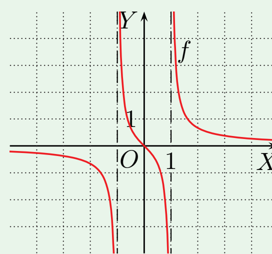
4. Wyznaczamy pochodną:

   $$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}, \quad D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$$

5. Pochodna f' jest ujemna dla $x \in D_{f'}$, zatem funkcja f jest malejąca w przedziałach $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ i $(1; \infty)$ oraz nie ma ekstremów.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	×	$-$	0	$-$	×	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	×	$\infty \searrow$	0	$\searrow -\infty$	×	$\infty \searrow 0$

Uwaga. Ponieważ funkcja f jest nieparzysta, można przeprowadzić badanie funkcji tylko dla $x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$, naszkicować odpowiedni fragment wykresu i odbić go symetrycznie względem punktu $(0, 0)$.



Prosta $y = mx + n$ jest **asymptotą ukośną** wykresu funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (mx+n)) = 0$. Współczynniki m i n asymptoty ukośnej (jeśli istnieje) wyznaczamy następująco:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$$

Analogicznie wyznacza się asymptotę ukośną wykresu funkcji w $-\infty$.

Uwaga. Funkcja może mieć asymtotę ukośną tylko wtedy, gdy jej granica w $\pm\infty$ jest równa $\pm\infty$.
Asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej – o współczynniku kierunkowym $m = 0$.

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.
2. $f(0) = 0$, zatem punkt $(0, 0)$ jest punktem przecięcia z osią OY.
   $f(x) = 0$ dla $x = 0$, zatem punkt $(0, 0)$ jest też jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji i osi OX.
3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja f jest określona:
   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-\frac{2}{x}} = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-\frac{2}{x}} = \infty$$
   $$\lim_{x\to2^-} \frac{x^2}{x-2} \overset{\left[\frac{4}{0^-}\right]}{=} -\infty, \quad \lim_{x\to2^+} \frac{x^2}{x-2} \overset{\left[\frac{4}{0^+}\right]}{=} \infty$$
   Zatem prosta $x = 2$ jest obustronną asymptotą pionową wykresu funkcji f. Sprawdzamy, czy istnieje asymptota ukośna jej wykresu.
   $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = 1$$
   $$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+2x}{x-2} =$$
   $$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\frac{2}{x}} = 2$$
   Zatem wykres funkcji ma w ∞ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + 2$. Podobnie wyznaczamy asymptotę ukośną wykresu funkcji w $-\infty$. Jest to też prosta $y = x + 2$.
4. Wyznaczamy pochodną:
   $$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-2}\right)' = \frac{2x(x-2)-x^2\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}, \quad D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

5. $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x(x-4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ lub $x = 4$

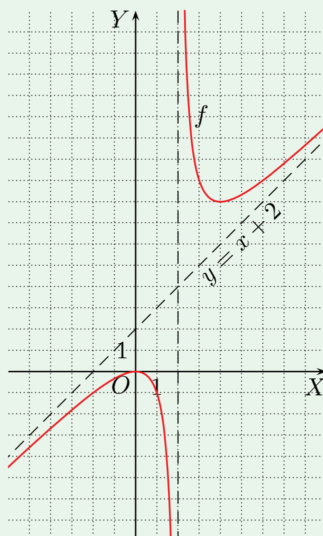
$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$

$f'(x) < 0$ dla $x \in (0; 2) \cup (2; 4)$

Funkcja f jest ciągła, zatem rośnie w przedziałach $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 4; \infty)$ oraz maleje w przedziałach $\langle 0; 2)$, $(2; 4\rangle$.

W punkcie $x_0 = 0$ funkcja f osiąga maksimum $f(0) = 0$, w punkcie $x_1 = 4$ osiąga minimum $f(4) = 8$.

x	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < 4$	4	$x > 4$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$	$\times$	$\infty \searrow$	8	$\nearrow \infty$



Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2}{|x|-1}$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

   Dla każdego $x \in D_f$ mamy $-x \in D_f$ oraz:
$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{|-x|-1} = \frac{x^2}{|x|-1} = f(x)$$
   więc funkcja jest parzysta, czyli jej wykres jest symetryczny względem osi OY. Zbadamy zatem przebieg funkcji f dla $x \in \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$ (zauważ, że w tym zbiorze $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$).

2. $f(0) = 0$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 0)$.

   $f(x) = 0$ dla $x = 0$, więc punkt $(0, 0)$ jest też jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji i osi OX.

3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja f jest określona:

   $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} \overset{\left[\frac{1}{0^-}\right]}{=} -\infty$ oraz $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} \overset{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=} \infty$

   Oznacza to, że prosta $x = 1$ jest obustronną asymptotą pionową wykresu funkcji f.

   $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = \infty$

Ponieważ granica funkcji f w ∞ jest równa ∞, sprawdzamy, czy istnieje asymptota ukośna jej wykresu.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

Zatem wykres funkcji ma w ∞ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + 1$.

4. Wyznaczamy pochodną:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}, \quad x \in \langle 0;1) \cup (1;\infty)$$

5. $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 - 2x = 0 \ \Leftrightarrow\ x(x-2) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$ lub $x = 2$

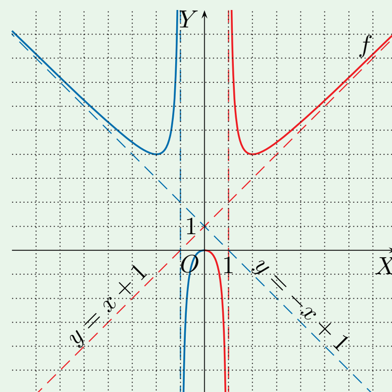
$f'(x) > 0$ dla $x \in (2;\infty)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (0;1) \cup (1;2)$

Funkcja f jest ciągła, zatem maleje w przedziałach $\langle 0;1)$ i $(1;2\rangle$ oraz rośnie w przedziale $\langle 2;\infty)$.

W punkcie $x_0 = 2$ funkcja f osiąga minimum $f(2) = 4$.

x	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow -\infty$	$\times$	$\infty \searrow$	4	$\nearrow \infty$

Szkicujemy wykres funkcji f dla $x \in \langle 0;1) \cup (1;\infty)$ – kolor czerwony. Pozostałą część wykresu – kolor niebieski – otrzymujemy, korzystając z symetrii względem osi OY.



Funkcja f osiąga minima w $x_0 = 2$ i $x_1 = -2$ oraz maksimum w $x_2 = 0$. Asymptotą ukośną w ∞ jest prosta $y = x+1$, a w $-\infty$ prosta $y = -x+1$.

1. Dana jest funkcja wymierna $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, gdzie u i v są wielomianami. Jaka jest zależność między stopniami wielomianów u i v, jeśli funkcja f ma asymptotę ukośną niebędącą asymptotą poziomą?

2. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \frac{x^3+2}{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$

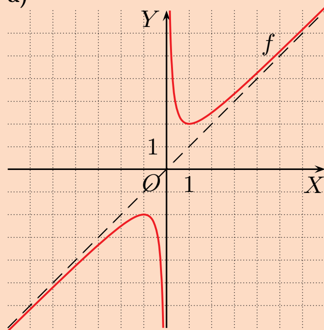
e) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{|x|-2}$

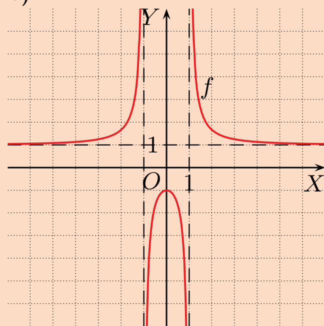
Odpowiedzi do zadań

1. Funkcja f ma asymptotę ukośną, czyli $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x\cdot v(x)}$ jest stała i różna od zera. Zatem $\mathrm{st}\,(u) = \mathrm{st}\,(v) + 1$.

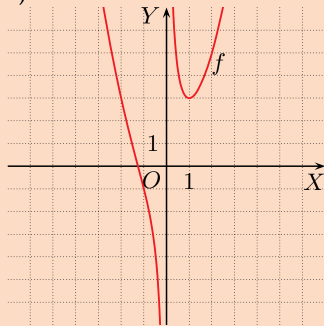
2. a)



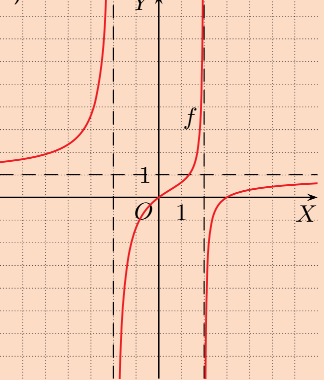
b)



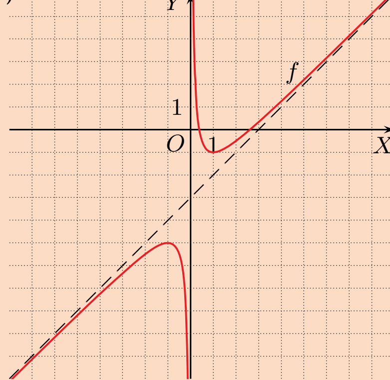
c)



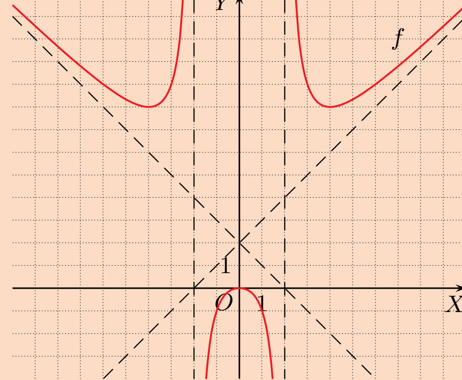
d)



e)



f)



Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+6x+8}{x^2+7x+12}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-9}$ d) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x^2-10x+9}{x^2-11x+18}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x-4}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to -6}\frac{\sqrt{7+x}-1}{x+6}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x-7}-1}{\sqrt{x-3}-1}$

3. Sprawdź, czy istnieje $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & \text{dla } x\neq 2\\ 1 & \text{dla } x=2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{dla } x\leqslant 2\\ 2x^2-x-1 & \text{dla } x>2\end{cases}$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{3}{x-5}$ c) $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{x}{4-x}$ e) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+1}{x^2-x-6}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x^2-4}$ f) $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x+1}{x^3+8}$

5. Zbadaj, czy granica istnieje.

a) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-3}{x^2-4x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$

6. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^4-x^2+6)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+2}{3x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+x}{8x^3-x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^5+x^2+x)$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^2+2x}{3x^2+x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^4-2x+1)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x^3-x^2+1}{1-4x^3}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x-1}{x+2}$

7. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji f.

a) $f(x)=\frac{x-1}{x}$ c) $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-5x+6}$ e) $f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{x}}$

b) $f(x)=\frac{x}{x^2-16}$ d) $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$ f) $f(x)=\sqrt{1+x^2}+x$

D **8.** Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie należące do podanego przedziału.

a) $-3x^4+6x^2+5=0,\ \ (0;2)$ b) $x^5-5x^3+x^2-7=0,\ \ (-2;-1)$

8. a) Niech $f(x)=-3x^4+6x^2+5$.
Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 0;2\rangle$ oraz $f(0)=5>0$, $f(2)=-19<0$. Zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(0;2)$, czyli równanie $-3x^4+6x+5=0$ ma rozwiązanie należące do tego przedziału.
b) Niech $f(x)=x^5-5x^3+x^2-7$.
Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle -2;-1\rangle$ oraz $f(-2)=5>0$, $f(-1)=-2<0$. Zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(-2;-1)$, czyli równanie $x^5-5x^3+x^2-7=0$ ma rozwiązanie należące do tego przedziału.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 0 **b)** $-\frac{1}{3}$ **c)** 2 **d)** $\frac{8}{7}$ **e)** 4 **f)** $\frac{2}{3}$

2. a) 2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 2

3. a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$
b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=5$
Granica nie istnieje.

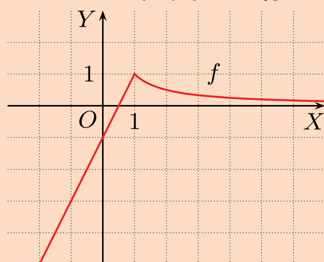
4. a), b), f) $-\infty$
c), d), e) ∞

5. a) $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{x-3}{(x-5)(x+1)}\overset{\left[\frac{2}{0^-}\right]}{=}-\infty$
$\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{x-3}{(x-5)(x+1)}\overset{\left[\frac{2}{0^+}\right]}{=}\infty$
Granice jednostronne są różne, zatem nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-3}{x^2-4x-5}$.
b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}}{x}\overset{\left[\frac{1}{0^-}\right]}{=}-\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}}{x}\overset{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=}\infty$
Granice jednostronne są różne, zatem nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{x}$.
c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\overset{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=}\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\overset{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=}\infty$
Zatem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}=\infty$.

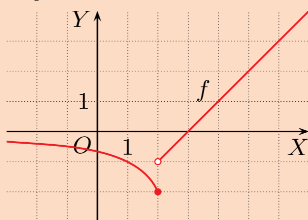
6. a) ∞ **b)** ∞ **c)** $-\infty$
d) 2 **e)** 3 **f)** -2
g) 0 **h)** $-\infty$ **i)** ∞

7. a) $x=0$ – pionowa obustronna, $y=1$ – pozioma w $\pm\infty$
b) $x=-4$, $x=4$ – pionowe obustronne, $y=0$ – pozioma w $\pm\infty$
c) $x=2$, $x=3$ – pionowe obustronne, $y=2$ – pozioma w $\pm\infty$
d) $x=-1$ – pionowa obustronna
e) $x=0$ – pionowa prawostronna, $x=1$ – pionowa obustronna, $y=0$ – pozioma w ∞
f) $y=0$ – pozioma w $-\infty$

9. a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$
$= \lim\limits_{x\to 1^-} (2x-1) = 1$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$
$= 1 = f(1)$
Zatem funkcja f jest ciągła.



b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$
$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{2}{x-3} = -2$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x-3) =$
$= -1$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$,
zatem funkcja nie jest ciągła w $x_0 = 2$.



10. a) tak, $a = -5$ **b)** nie

11. a) $f'(x) = -20x^3 + x^2 + 1$, $f'(1) = -18$
b) $f'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(1) = 0$
c) $f'(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$, $f'(1) = -5\frac{1}{2}$
d) $f'(x) = \frac{7x^3-1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = 3$
e) $f'(x) = \frac{2x^4+7x^2-1}{(x^2+1)^2}$, $f'(1) = 2$
f) $f'(x) = \frac{6x^2+9}{2x\sqrt{x}}$, $f'(1) = \frac{15}{2}$

9. Zbadaj ciągłość funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{dla } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-3} & \text{dla } x \leqslant 2 \\ x-3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

10. Czy można tak dobrać wartość parametru a, żeby funkcja f była ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{x+1} & \text{dla } x < 0 \\ a & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-1}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ a & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

11. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej równej 1.

a) $f(x) = -5x^4 + \frac{x^3}{3} + x$ c) $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ e) $f(x) = \frac{2x^3-x}{1+x^2}$
b) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x}$ d) $f(x) = (x^3-1)\sqrt{x}$ f) $f(x) = \frac{2x^2-9}{\sqrt{x}}$

Zestaw II

1. Dla jakiej wartości parametru a granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{ax^2-x+1}$ jest równa:
a) 1, b) 2, c) $-\infty$?

2. Oblicz granicę.
a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x})$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2x+x^2} + x\right)$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x}}{x+1}$
b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-1} - 2x\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2+1}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+x}}$

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.
a) $f(x) = 3x^2 + 1$, $x_0 = 0$ d) $f(x) = (x-4)^3$, $x_0 = 3$
b) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x$, $x_0 = -1$ e) $f(x) = \frac{x-3}{x}$, $x_0 = 1$
c) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, $x_0 = 2$ f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$, $x_0 = 1$

4. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$, jeśli:
a) są one równoległe do prostej o równaniu $y = 7x - 4$,
b) są one prostopadłe do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$,
c) tworzą one z osią OX kąt $135°$.

5. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.
a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ c) $f(x) = \frac{x+2}{x}$ e) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ f) $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$

Zestaw II

1. a) $a = 2$ **b)** $a = 1$ **c)** $a = 0$
2. a) ∞ **b)** 0 **c)** -1 **d)** 0 **e)** ∞ **f)** $\frac{1}{2}$
3. a) $y = 1$ **b)** $y = 2x + \frac{2}{3}$ **c)** $y = -\frac{1}{4}x$ **d)** $y = 3x - 10$ **e)** $y = 3x - 5$ **f)** $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$
4. a) $y = 7x + 19$, $y = 7x - 17$ **b)** $y = 2x - \frac{13}{3}$, $y = 2x + \frac{19}{3}$
c) $y = -x + \frac{1}{3}$, $y = -x + \frac{5}{3}$
5. a) rośnie w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$, maleje w $\langle -2; 1\rangle$
b) rośnie w $\mathbf{R}$
c) maleje w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$
d) rośnie w $(-\infty; -2\rangle$ i w $\langle 0; \infty)$, maleje w $\langle -2; -1)$ i w $(-1; 0\rangle$
e) maleje w $(-\infty; -1\rangle$, rośnie w $\langle -1; 0)$ i w $(0; \infty)$
f) rośnie w $(-\infty; -\frac{1}{2}\rangle$ i w $\langle \frac{1}{2}; \infty)$, maleje w $\langle -\frac{1}{2}; 0)$ i w $(0; \frac{1}{2}\rangle$



6. Wyznacz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x$ d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ g) $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}$

b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ e) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ h) $f(x) = \sqrt{2x^4 - x^2 + 1}$

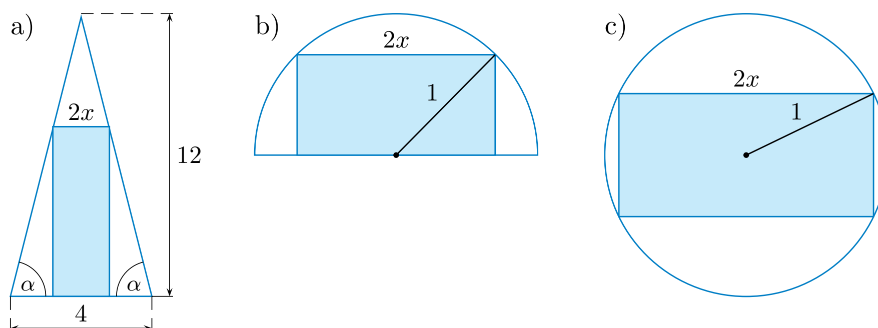
c) $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ f) $f(x) = \frac{3x}{x^2+4x+4}$ i) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}$

7. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^3 - 6x$, $\langle -2; 3\rangle$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$, $\langle -4; 4\rangle$

b) $f(x) = \frac{x-8}{x+2}$, $\langle 0; 8\rangle$ d) $f(x) = \sqrt{2x(9-x)}$, $\langle 1; 3\rangle$

8. Przedstaw pole P prostokąta (rysunek poniżej) jako funkcję zmiennej x. Dla jakiego argumentu x pole jest największe? Podaj wymiary prostokąta o największym polu.



9. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$ g) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$

b) $f(x) = x^4 + x^2 - 2$ e) $f(x) = \frac{8x}{x^2+8}$ h) $f(x) = \frac{6}{x^2-2x+8}$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ f) $f(x) = \frac{-2}{x^2-1}$ i) $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x}$

10. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-9}$ b) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

11. Naszkicuj wykres funkcji f.

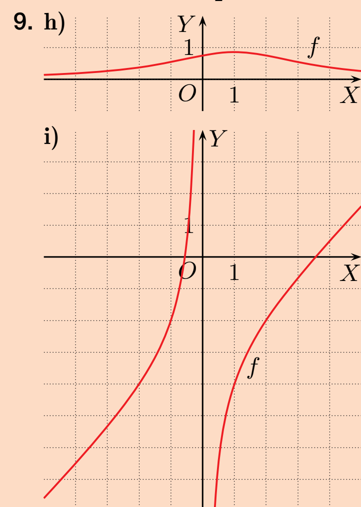
a) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ b) $f(x) = (4-x)\sqrt{x}$ *c) $f(x) = (x-2)^2\sqrt{x}$

6. a) minimum $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{14}{27}$, maksimum $f(-1) = -\frac{1}{2}$
b) minimum $f(-2) = -24$
c) minimum $f(-2) = -\frac{1}{2}$, maksimum $f(2) = \frac{1}{2}$
d) minimum $f(0) = -1$
e) minimum $f(2) = 3$
f) maksimum $f(2) = \frac{3}{8}$
g) minimum $f(0) = \sqrt{2}$
h) minimum $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{14}}{4}$, maksimum $f(0) = 1$
i) maksimum $f(0) = \sqrt{2}$

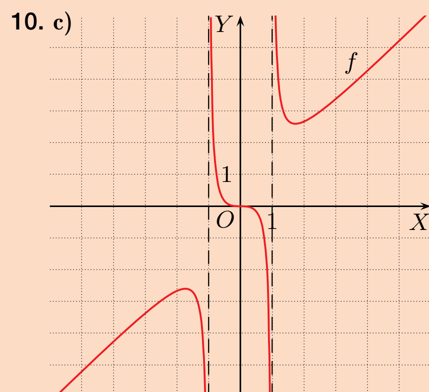
7. a) najmniejsza: $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$, największa: $f(3) = 9$
b) najmniejsza: $f(0) = -4$, największa: $f(8) = 0$
c) najmniejsza: $f(-2) = -\frac{1}{4}$, największa: $f(2) = \frac{1}{4}$
d) najmniejsza: $f(1) = 4$, największa: $f(3) = 6$

8. a) $P(x) = 24x - 12x^2$, $x \in (0; 2)$, $x = 1$, 2×6
b) $P(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, $x \in (0; 1)$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $P(x) = 4x\sqrt{1-x^2}$, $x \in (0; 1)$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$

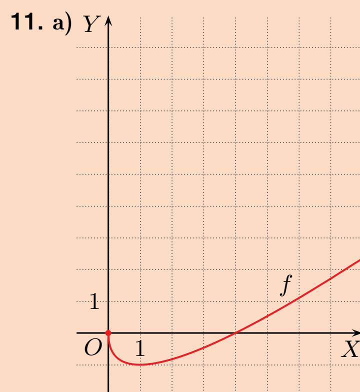
9. h) **i)**



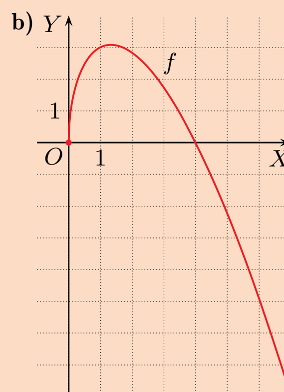
10. c)



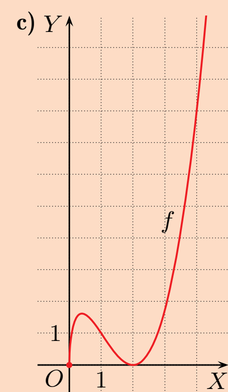
11. a)



b)



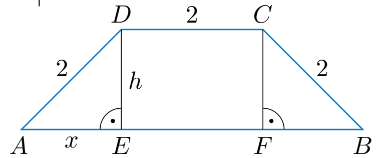
c)





Przykład

Jakie jest największe możliwe pole trapezu równoramiennego, którego ramiona i krótsza podstawa mają długość 2?



W trapezie $ABCD$ (rysunek obok) niech $x = |AE|$.
Wówczas wysokość trapezu jest równa:

$$h = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}, \text{ gdzie } x \in (0; 2)$$

Pole trapezu:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |DE|$$

zapisujemy jako funkcję zmiennej x:

$$P(x) = \frac{(2+2x)+2}{2} \cdot \sqrt{4 - x^4} = (2 + x)\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{(2 + x)^2(4 - x^2)}$$

$$P(x) = \sqrt{-x^4 - 4x^3 + 16x + 16}$$

gdzie $x \in (0; 2)$.

Następnie wyznaczamy największą wartość funkcji P. W tym celu możemy:

- wyznaczyć pochodną funkcji P:

$$P'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x^4 - 4x^3 + 16x + 16}} \cdot (-4x^3 - 12x^2 + 16)$$

lub

- rozpatrzyć funkcję pomocniczą:

$$f(x) = -x^4 - 4x^3 + 16x + 16$$

gdzie $x \in (0; 2)$.

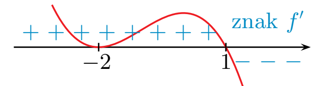
Funkcja $y = \sqrt{t}$ jest rosnąca, więc funkcje P i f osiągają wartość największą dla tego samego argumentu x.

$$f'(x) = -4x^3 - 12x^2 + 16, \text{ gdzie } x \in (0; 2)$$

$$-4x^3 - 12x^2 + 16 = 0 \text{ dla } x \in \{-2, 1\} \text{ (sprawdź)}$$

Z założenia $x \in (0; 2)$, zatem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Funkcja f rośnie w przedziale $(0; 1\rangle$ i maleje w przedziale $\langle 1; 2)$, zatem dla $x = 1$ funkcja f oraz funkcja P osiagają wartości największe.



$$P(1) = \sqrt{-1^4 - 4 \cdot 1^3 + 16 \cdot 1 + 16} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole takiego trapezu jest równe $3\sqrt{3}$.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=a$, gdy:

A. $a=12$, **B.** $a=8$, **C.** $a=4$, **D.** $a=2$.

2. Wskaż wzór funkcji, dla której $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$.

A. $f(x)=\frac{x-1}{1-x^4}$ **C.** $f(x)=\frac{x-1}{1-x^2}$

B. $f(x)=\frac{x-1}{1-x^3}$ **D.** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

3. Prosta dana równaniem $x=-3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji:

A. $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$, **C.** $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x+3}$,

B. $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$, **D.** $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x+3}$.

4. Funkcja $f(x)=\begin{cases} x+a & \text{dla } x\in(-\infty;-2\rangle \\ -\frac{1}{2}x+2 & \text{dla } x\in(-2;\infty)\end{cases}$ jest ciągła, gdy:

A. $a=6$, **B.** $a=5$, **C.** $a=1$, **D.** $a=-2$.

5. Styczna do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x}{x^2-3}$ w punkcie o odciętej $x_0=2$ ma współczynnik kierunkowy równy:

A. 6, **B.** 4, **C.** -3, **D.** -7.

6. Styczna do wykresu funkcji $f(x)=x^2-4$ poprowadzona w punkcie $(2,0)$ tworzy z osią OX kąt α. Wartość bezwzględna różnicy $\beta-\alpha$ jest najmniejsza, gdy:

A. $\beta=45°$, **B.** $\beta=52°$, **C.** $\beta=60°$, **D.** $\beta=76°$.

7. Funkcja $f(x)=\frac{3x}{x^2-x+1}$ rośnie w przedziale:

A. $(-3;-1)$, **B.** $(-1;1)$, **C.** $(1;3)$, **D.** $(3;\infty)$.

8. Najmniejsza wartość funkcji $f(x)=x^4-4x^2-3$ w przedziale $\langle 0;4\rangle$ jest równa:

A. -7, **B.** -4, **C.** -3, **D.** 0.

9. Jaki jest największy możliwy iloczyn liczb x^2 i y, jeżeli $x>0$ i $2x+y=4$?

A. $\frac{64}{27}$ **B.** $\frac{16}{9}$ **C.** 2 **D.** 4

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=$
$=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

2. **A.** $f(x)=\frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=$
$=\frac{-1}{(1+x)(1+x^2)}$,
$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ nie istnieje

B. $f(x)=\frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=$
$=\frac{-1}{1+x+x^2}$,
$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\frac{-1}{1}=-1$

C. $f(x)=\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{1+x}$,
$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ nie istnieje

D. $f(x)=x+1$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$

4. $\lim\limits_{x\to -2^-}(x+a)=-2+a=$
$=f(-2)$
$\lim\limits_{x\to -2^+}\left(-\frac{1}{2}x+2\right)=3$
Zatem funkcja jest ciągła dla $a=5$.

5. $f'(x)=\frac{-x^2-3}{(x^2-3)^2}$
$a=f'(2)=-7$

6. $f'(x)=2x$
$a=f'(2)=4=\operatorname{tg}\alpha$,
czyli $\alpha\approx 76°$

7. $f'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2-x+1)^2}$

8. $f'(x)=4x^3-8x=0$ dla
$x\in\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$,
$f(\sqrt{2})=-7$, $f(0)=-3$,
$f(4)=189$

9. $y=4-2x$, $x>0$
$f(x)=x^2(4-2x)=-2x^3+4x^2$
$f'(x)=-6x^2+8x=-2x(3x-4)$
maksimum lokalne dla $x_0=\frac{4}{3}$, $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$



W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz:
$$\lim_{x\to-\frac{4}{3}}\frac{3x^3+4x^2-6x-8}{9x^2-16}$$
Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji:
$$f(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$$
w punkcie $x_0=1$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3 (2 pkt)

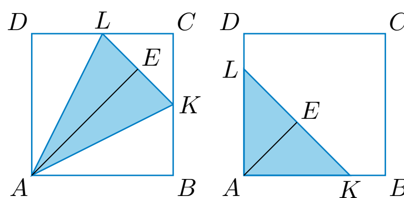
Wyznacz największą wartość funkcji $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x$ w przedziale $(-\infty;1\rangle$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4 (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru m równanie $2x^3-\frac{3}{2}x^2-3x=m$ ma rozwiązanie należące do przedziału $\langle 0;1\rangle$?

Zadanie 5 (5 pkt)

Bok kwadratu $ABCD$ ma długość $2\sqrt{2}$. Wierzchołki K i L trójkąta równoramiennego AKL (gdzie $|AK|=|AL|$) należą do boków kwadratu (rysunek obok). Przedstaw pole P trójkąta AKL jako funkcję jego wysokości x (gdzie $x=|AE|$). Określ dziedzinę funkcji P. Zbadaj ciągłość tej funkcji i naszkicuj jej wykres.



Zadanie 6 (5 pkt)

Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji:
$$f(a)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3ax^2}{(a^2+4)x^2+7}$$
w przedziale $\langle -5;5\rangle$.

Zadanie 7 (7 pkt)

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$, którego ramię AD jest prostopadłe do dłuższej podstawy AB. Krótsza podstawa DC oraz ramię BC mają długość 4. Oblicz wysokość takiego trapezu $ABCD$ spełniającego podane warunki, którego pole jest największe.

Odpowiedzi do zadań

1. $\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}}\frac{(3x+4)(x^2-2)}{(3x+4)(3x-4)}=\frac{1}{36}=$
$=0{,}02(7)$
Należy zakodować: 027.

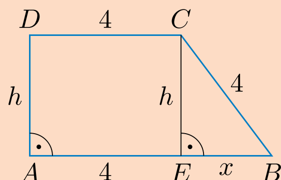
2. $x\in(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$
$f'(x)=\frac{2x-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}$
$f'(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}3536$
Należy zakodować: 353.

3. $f(1)=-\frac{5}{3}=-1{,}(6)$
$f'(x)=x^2-2$
$f'(x)=0$ dla $x=\pm\sqrt{2}$
Funkcja f rośnie w $(-\infty;-\sqrt{2}\rangle$, maleje w $\langle-\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$, zatem największą wartość w przedziale $(-\infty;1\rangle$ osiąga dla $x=-\sqrt{2}$.
$f(-\sqrt{2})=\frac{4\sqrt{2}}{3}\approx 1{,}8856$
Należy zakodować: 188.

4. Niech $f(x)=2x^3-\frac{3}{2}x^2-3x$, $x\in\langle 0;1\rangle$.
$f'(x)=6x^2-3x-3=$
$=6\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$
$f(0)=0,\ f(1)=-\frac{5}{2}$
$m\in\langle-\frac{5}{2};0\rangle$

6. $f(a)=-\frac{3a}{a^2+4}$
$f'(a)=\frac{3(a-2)(a+2)}{(a^2+4)^2}$
$f(-2)=\frac{3}{4},\ f(2)=-\frac{3}{4},$
$f(-5)=\frac{15}{29},\ f(5)=-\frac{15}{29}$
Wartość najmniejsza: $f(2)=-\frac{3}{4}$, największa: $f(-2)=\frac{3}{4}$

7. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$h=\sqrt{16-x^2},\ x\in\langle 0;4)$
Pole trapezu:
$P(x)=\frac{8+x}{2}\cdot\sqrt{16-x^2}$, $x\in\langle 0;4)$
$P'(x)=-\frac{x^2+4x-8}{\sqrt{16-x^2}},\ x\in(0;4)$
$P'(x)=0$ i $x\in(0;4)$ dla $x=2\sqrt{3}-2$
$h=\sqrt{16-\left(2\sqrt{3}-2\right)^2}=$
$=2\sqrt{2\sqrt{3}}$

5. $|AC|=|AB|\cdot\sqrt{2}=4$
$1^\circ\ x\in(2;4)$
$|KE|=|EC|=4-x$
$P(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|KE|\cdot x=x(4-x)$
$2^\circ\ x\in(0;2\rangle$
$|KE|=|EA|=x$
$P(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|KE|\cdot x=x^2$
Zatem:
$$P(x)=\begin{cases}x^2 & \text{dla } x\in(0;2\rangle\\ 4x-x^2 & \text{dla } x\in(2;4)\end{cases}$$
$D=(0;4)$

$\lim\limits_{x\to2^-}P(x)=\lim\limits_{x\to2^-}x^2=4$
$\lim\limits_{x\to2^+}P(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(4x-x^2)=4$
$\lim\limits_{x\to2^-}P(x)=\lim\limits_{x\to2^+}P(x)=4$, czyli
$\lim\limits_{x\to2}P(x)=4=P(2)$, stąd funkcja jest ciągła w $x_0=2$.
Funkcja P jest ciągła.

